CORSO DI STUDJ

DI

G. ROCCHI

PROFESSORE DI FISICA NEL REAL COLLEGIO DI SOLMONA

TOMO I.

GRANDEZZE ANALIZZATE COL CALCOLO ELEMENTARE.

NAPOLI 1808.

PRESSO GAETANO RAIMONDI

Col dovuto permesso.

Ordo Scholæ Philosophis vulgaribus relinquendus, & a geometris aliisque, quibus res profundius scrutari datum est, ordo naturæ retinendus.

Wolf. de Meth. Mat.

A. S. E.

Il Sig. D. Giuseppe Parisi Generale di Divisione, Consigliere di Stato, Ispettor Generale del Genio Napolitano, e delle Scuole Militari, Governatore della Pageria Reale ec. ec.

SIGNORE.

CErcando in V. E. un protettore alla mia opera, ritrovo un cuore benigno, che non disprezza i miei omaggi, veraci sentimenti dell' animo mio. Un' opera matematica non può

presentarsi ad altri più ragionevolmente. Al frontespizio dell' immortale sua opera, uniformandosi ad un antico politico, Ella reputa felici le arti, se i soli artefici ne giudicassero. Ma non credo facil cosa trovar chi competentemente decida de' suoi sublimi talenti, del suo vasto e profondo sapere. Se poi si degnerà V. E. rubare qualche attimo di tempo ai serj affari, alle gravi sue cariche; e dare un' occhiata passaggera a questa prima parte di un corso di studj, che ora le umilio: potrà meglio di chicchesia recarne giudizio. Che se si crede, ed è il più grave danno aver il giudice avverso; sarà senza dubbio veruno il più gran piacere averlo

pro-

protettore, e benevolo. Ella compatirà le mie debolezze, e considerando che co' miei travagli proccuro giovare gli altri, non riproverà, che le renda palesi. Nel tempo stesso ottengo l' altro vantaggio, che da me è maggiormente prezzato, di far noto al pubblico la gratitudine dell' animo mio, e 'l più profondo ossequio, e rispetto, con cui mi rassegno.

Napoli 19. Marzo 1808.

Di V. E.

Divotiss. Servo Ossequiosiss.
Gherardo Rocchi.

PREFAZIONE.

NEllo scrivere le lezioni di matematica abbiamo avute presenti queste vedute; di scrivere pe' principianti; di non lasciare senza dimostrazione qualunque verità, e di dedurle l'una dall'altra coll' ordine più semplice e naturale. Tra le dimostrazioni abbiamo scelte le più facili, e brevi. Il primo tomo propone il calcolo, e coll' ajuto di esso sviluppansi i caratteri delle grandezze. Si sono sempre doluti i geometri più illustri dell' ordine nelle opere immortali di Euclide: e senza dubbio la principal cagione è la mancanza delle dottrine delle ragioni ne' primi quattro libri. Noi, conceputo il disegno di una breve istituzione matematica, ci proposimo di trattare sul principio delle ra-

ragioni . Il calcolo ha dovuto precedere, per dimostrarne i teoremi. Si è finalmente inserito qualche cenno sulle serie, e su i logaritmi.

II. Il secondo volume avrà per titolo la grandezza continua, e sarà diviso in tre parti: figure rettilinee; cerchi, e misura de' triangoli; solidi, e triangoli sferici. Il metodo che osserveremo, sarà uniforme a quello, che teniamo nel primo volume. Molti teoremi, e la soluzione di varj problemi sarà ricavata dalle formole: ma quando potremo usare dimostrazioni, o costruzioni più facili, abbandoniamo le formole. Il fine principale si è quello di facilitare, per quanto è possibile, lo studio di tali discipline. E considerando l'estensione come una forza corporea, ancorchè possa scevra della materia concepirsi, stimeremo col sa-

sagacissimo Newton la geometria come parte della meccanica (a): onde spessissimo dall' attenta contemplazione, o dalla genesi delle figure ricaveremo i loro caratteri.

III. Il calcolo proposto nel primo volume potrebbe sembrare quasi inutile, o almeno di niun vantaggio agli usi della vita: ma nel terzo tomo, esponendo sulle prime le principali dottrine dell' equazione, l' applicheremo alla soluzion de' problemi. Indi daremo le principali nozioni del calcolo sublime. La seconda parte di questo volume sarà destinata alle sezioni del cono, e l' ultima ad alcuna delle curve trascendentali.

IV.

(a) *Fundatur geometria in praxi mechanica, et nihil aliud est, quam mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi accurrate proponit, ac demonstrat. New. Præ. P. M.*

IV. Alle lezioni di matematica seguiranno, se il ciel seconda le nostre mire, le lezioni di Fisica. Saran queste divise in quattro parti. La prima sarà la fisica propriamente detta. Cominciando dalle forze della materia, che si fanno maggiormente osservare, si esporrà la meccanica in tutte le sue parti, l'aerometria, ed ottica colla perspettiva. La seconda sarà la fisica-chimica. La terza la fisica de' tre regni. In questa, contemplando da un granello di arena, daremo rapidamente uno sguardo a tutta la natura. Fermati un poco sull' ultimo anello, di cui abbiam cognizione, analizzeremo attentamente l' esteriore struttura dell' uomo, e gli organi suoi principali, per dedurne la spiega delle sue funzioni. Ma qualunque analisi dell' organizzazione dell'uomo,

e

e delle forze della materia non ci fanno spiegare quanto da esso si esegue. Ecco la necessità di ricorrere ad una ignota sostanza diversa dal corpo. Noi esporremo brevemente gli argomenti, che ne provano l'esistenza, e quelli, co' quali da taluni è negata; affinchè dall'evidenza de' primi resti ognuno convinto, e si appigli al partito più ragionevole. Conchiuderemo, riflettendo con Cicerone, quanto giovi alla società tale credenza: che ogni filosofo dovrebbe co' maggiori sforzi stabilire un principio quasi universalmente impresso dalla educazione nel cuore dell'uomo. Finalmente nella quarta parte esporremo la fisica de' cieli, seguendo sull' orme di M. Lalande lo sviluppo dello spirito umano in tale disciplina. Daremo un saggio di cronologia e del calendario.

Ma

Ma come la cronologia è diretta alla intelligenza della storia, così per non inserire in un corso di fisica de' trattati, che secondo il comune pensare non ci hanno la menoma relazione, chiuderemo l'opera con un' appendice sull' arte critica. In tutto il corso ci prenderemo la libertà d'inserire in qualche nota delle dottrine metafisiche, e logiche.

V. Affinchè fosse un compiuto corso di studj, dopo la fisica daremo un saggio di morale. Sarà quest' opuscolo diviso in due parti: nella prima si analizzerà l' indole dell' uomo, non quale può idearsi, ma come la storia ce lo descrive. La seconda parte proporrà i doveri, che contrae dalla società, in cui vive.

VI. La brevità del primo volume mi dispensa da una lunga prefazione. Resta solo, render con-

sa-

sapevole il pubblico, che negli scorsi anni, prima di cominciare a dettare la fisica manoscritta, feci girare per le mani di parecchi amici un piano molto esteso e dettagliato; e fui da essi ingenuamente avvertito, che per la novità del metodo sarei incorso in molti ostacoli insuperabili. Profittando de' loro lumi ed avvisi, ho cercato evitarli, per quanto mi è stato possibile. Ora che esce alla luce il primo volume di matematica, prego tutti degli stessi favori. Un corso di fisica che, dando i principj delle altre scienze, evita le spinose quistioni metafisiche, ed i seccanti precetti di logica, potrebbe recare molto vantaggio alla gioventù: e tutti devono impegnarsi alla causa comune. Mi onorino dunque de' loro avvisi, che io gliene sarò gratissimo.

LEZIONE I.

Oggetto della Matematica, e varie sorti di grandezze.

1. La Matematica, derivata dal greco *Mathesis*, che vuol dire disciplina, considera l' estensione, i numeri, il moto, e tutto ciò, che l' accompagna, o lo produce in ogni sorta di corpi, o nelle diverse specie di essi. Ogni corpo occupa un luogo; è lungo, largo, e profondo: il corpo, il luogo occupato, e la distanza, che passa tra' corpi, dicesi *Estensione*. Nel mondo trovasi a' nostri sensi esposto non un corpo solo, ma molti: questa moltiplicità produce in noi l' idea de' numeri. Vediamo finalmente i corpi muoversi quasi di continuo; ecco nella nostra mente l' idea del moto. L' estensione, e i numeri sono l'oggetto della *Matematica Pura*: e 'l *Moto* della *Matematica Mista*, o *Fisico-Matematica*.

2. Il moto non può confondersi co' numeri, nè i numeri coll' estensione; pure pos-

son tutti concepirsi maggiori; o minori; sono composti di parti; e tutti posson crescersi, o scemarsi: per questo sol carattere comune si comprendono sotto il nome generale di *quantità* o *grandezza*. L' estensione è tutta unita, e le parti, ond' è composta, non si concepiscono esistere anticipatamente sole separate, e disgiunte, perciò si chiama *grandezza continua*: i numeri sono composti di parti, che posson esister sole, e formare ognuna un tutto; onde se li dà il nome di *grandezze discrete*. Diconsi numeri, perchè le loro parti sono determinate, cosa che non trovasi nelle grandezze continue. Finalmente il moto dicesi *grandezza successiva*; perchè movendosi un corpo, scorre successivamente lo spazio, e va mano mano perdendo la forza, che lo spinge. La *Geometria* considera l' estensione, l' *Aritmetica* i numeri, e la Meccanica colle altre parti di *Matematica mista* il moto con tutte le sue modificazioni a norma delle diverse specie de' *mobili*.

3. Dal detto rilevasi, che tutte le grandezze hanno alcuni caratteri comuni, ed altri

particolari, pe' quali si distinguono fra loro. Questi ultimi si trattano separatamente in varie scienze, che sono altrettante parti di *Matematica* (2); e gli altri dovrebbero esaminarsi egualmente in una scienza ad essi soli destinata; ma trovansi disperse nell'*aritmetica*, nella *geometria* e nell'*algebra*. Sarà dunque non inutil lavoro occuparci in primo luogo sulle grandezze in generale, anche per non esser nell' obligo d'interrompere l'ordine, che ci siam prefissi seguire nelle seguenti parti, in cui tratteremo dell' estensione in tutt'i suoi diversi rami, che formano la *Geometria Elementare*, e *Sublime*.

4. Ora in ogni grandezza paragonata ad un'altra può primamente osservarsi, se una pareggia l'altra, o se la supera. Indi possiamo conoscere per varj mezzi la loro eguaglianza, o diseguaglianza. Se dopo tal esame si trovano diseguali, può considerarsi quanto differiscono fra loro, o quante volte dovrebbe la minore replicarsi, per eguagliar la maggiore. L'uno, e l'altro confronto dicesi *Ragione*, la prima *Ragione*

Aritmetica, e la seconda *Geometrica*. Quindi, seguendo lo sviluppo dello spirito umano, e quell' ordine, col quale forse nascon in esso l'idee (*a*), esamineremo i caratteri d'eguaglianza, ed indi le ragioni.

5. Se si considerassero varie grandezze diseguali della stessa specie, come un miglio, due, tre, quattro miglia; queste distanze potrebbero tutte concepirsi come i semplici numeri 1, 2, 3, 4. Così può discorrersi per le altre sorti di grandezze. Dunque tutt' i caratteri che convengono ai numeri, si trovano nell' altre grandezze, e tutte possono maneggiarsi al par di quelli, e colle stesse regole. Per tal ragione

(*a*) L'idee nascono negli uomini per diverse vie, e senza dubbio con ordine differente a norma della varietà delle circostanze, che le producono. Ma se per tutti gli uomini potesse determinarsi un ordine comune, sarebbe certamente uno. Sarà forse il nostro! Tutti l'han cercato: tutti han creduto averlo trovato, perchè . . . . Noi ne' *Caratteri generali delle grandezze*, nelle *Grandezze Continue*, e nella *Fisica* seguiremo quello, che abbiamo sperimentato vantaggioso a molti giovinetti, che l' hanno appreso.

co' numeri potrebbero dimostrarsi tutte le teorie, ch' esporremo in quest' opera: ma perchè i numeri han un valore determinato, (2) non danno risultati generali, e dovrebbero ripetersi i calcoli, ci serviremo di lettere. E per rendere le dimostrazioni più chiare, si confermeranno co' calcoli numerici.

6. Dal che i caratteri de' numeri si trovano in tutte l'altre grandezze (5), non dee conchiudersi, che un numero possa esser eguale ad uno spazio, ad un moto, o divenirci con qualunque operazione: quindi non possono paragonarsi in verun modo, od osservarsi la ragione fra essi. Sono però frequenti l'espressioni, che intese secondo il loro significato, contradicono questa verità. Si dice da' fisici: *Lo spazio è in ragione della velocità di un mobile*; e da' geometri: *Le circonferenze son come i raggi*, e mille altre. I matematici, concependo queste grandezze diverse divise nelle loro piccolissime parti, paragonano il numero di esse, e non già le grandezze stesse. Non possono paragonarsi che grandezze

omogenee : cioè quelle che sono o posson divenir eguali , e le parti di una possono sostituirsi alle parti dell' altra.

LEZIONE II.

Algorismo degl' Interi.

7. Potendosi tutte le grandezze calcolare come i numeri (5), è facile applicare a tutte le grandezze i calcoli de' numeri. Ora tutt' i calcoli si riducono ad aumentare una grandezza, od a scemarla. Due sono le vie di crescerla, aggiungendo ad essa una o più grandezze omogenee; o pure replicando la stessa più volte: per altri due mezzi si diminuisce, togliendone una solamente una volta o più volte. Dunque a quattro operazioni si riduce l' algorismo de' numeri: sommare, e moltiplicare, sottrarre, e dividere. Quantunque ogni numero deve contenere più unità (2); pure si possono calcolare anche le parti dell' unità, le quali si chiamano *Rotti*.

Dell' Addizione.

8. L'Addizione dunque consiste nell' unire uno ad un altro numero (7), per conoscere il valore di tutti: per cui il numero che nasce, il quale dicesi *Somma*, è maggiore di ciascuno, ed eguale a tutti presi insieme. Le prime regole dell' addizione de' *numeri semplici*, che non eccedono 9, s' imparano, come s' avvezza a filare i raziocini più facili, dalla prima infanzia; ma volendosi sommare *numeri composti*, che passano 9, non si arriva senza altre nozioni,

9. Sieno dunque da sommare 5689, 437, 251, 69, 43.

$$\begin{array}{r} 5689 \\ 437 \\ 251 \\ 69 \\ 43 \\ \hline 6489 \end{array}$$

1.° Si scrivano ordinatamente l' uno sotto l' altro, in modo che tutte l' unità, le de-

cine, centinaja ec. di tutt' i numeri dati formino tante distinte colonne, come si veggono. 2° Si cominci da destra, unendo insieme 9, 7, 1, 9, 3, si trova 29. Nell' ultima colonna a destra, essendo le sole unità, non potrà scriversi l' intero numero, che contiene due decine: si scriverà dunque il 9, e le decine si serbano per la colonna seguente. Sommando la colonna seguente colle due decine, che si sono riportate dalla prima, si trova 28; e per la stessa ragione dee scriversi corrispondentemente il solo 8. Così proseguendo, si otterrà la somma 6489, che pareggia tutt' i cinque numeri insieme presi.

10. In tal calcolo può incorrersi in qualch' errore: hanno perciò investigati varj metodi per esaminarlo. A tutti gli altri devono preferirsi due soli, che consistono nel reiterare la somma, separando una fila de' numeri dati, la quale nuovamente si aggiunge; o nel sottrarre dalla prima somma la seconda.

Della Moltiplicazione.

11. SE un numero vuol moltiplicarsi per un altro, si può, secondo di sopra si è proposto (8, e 9), replicarne uno, quanto indica l'altro, e la somma di tutti pareggia un numero moltiplicato per l'altro. Tal metodo si è trovato molto lungo, e se n'è escogitato un'altro; che colla sua brevità riesce assai comodo. Sieno due numeri 347, 6. 1.° Si scrivano uno sotto l'altro, e per maggior brevità si scrive il maggiore sopra, e 'l minore sotto, e si moltiplica il maggiore pel minore: quello che si moltiplica, dicesi *Moltiplicando*, e quello, pel quale si moltiplica, *Moltiplicatore*; e con un nome comune, si chiamano entrambi *Fattori*.

Ecco. 347
6
———
2082

2.° Si moltiplica 7 per 6; si ha 42; ma sotto la linea si scrive il solo 2 nella

prima colonna, come nella somma (9). Indi si moltiplica 4 per 6, ed al numero 24, che si ottiene, si aggiunge 4, e si ha 28, ma si scrive il solo 8. Così proseguendo, si ottiene 2082, prodotto de' numeri dati.

12. Se poi amendue i *fattori* sono *numeri composti* 594, e 63

```
 594
  63
────
1782
3564
────
37422
```

1. Si scrivano l'uno sotto l'altro, come sopra, e si moltiplica il *moltiplicando* per l'ultima cifra 3 del *moltiplicante*, e sotto la linea si scrive il primo prodotto 1782. 2.° Indi si moltiplica lo stesso numero per l'altra cifra 6, e'l prodotto 3564 si scriverà sotto, ma avvanzando un luogo, perchè moltiplicando 594 per 6, si dee intendere moltiplicato per 60. 3.° Si sommano i due prodotti; e si avrà il prodotto totale de' numeri dati.

13. E poichè il numero 42, e. g. ottenendosi moltiplicando 6 per 7, e 7 per 6, non dovrà alterarsi il prodotto, passando il moltiplicando in moltiplicatore. Dunque se dopo fatta la moltiplicazione, si ripete a rovescio, e si ottiene lo stesso prodotto, non si sarà commesso errore nel calcolo.

Della Sottrazione.

14. Nella sottrazione si cerca scemare un numero (7), e si rileva quanto rimane, dopo aver fatto il calcolo. Per l'operazione si osserva 1°. la stessa regola dell'addizione, scrivendo però la grandezza maggiore nella fila prima, e la minore nella seconda. 2.° Si comincia anche sempre da destra, sottraendo ciascuna cifra della fila inferiore dalla superiore corrispondente, e nella stessa colonna sotto la linea si nota l'avvanzo.

15. Voglia sottrarsi 2635827 da 6300253

6300253

2635827

3664426

6300253

1. Si scrivano l' uno sotto l'altro, come si è avvertito. 2.° Dee sottrarsi 7 da 3. Questo è impossibile; onde aggiungerò a 3 10, sottraggo 7 da 13, e scriverò l' avvanzo 6. E poichè il 10 aggiunto a 3 equivale ad 1 della seguente colonna di decine: o l' aggiungo al 2 della fila inferiore, o lo tolgo da 5 della superiore. E così nell' uno come nell' altro caso ho 2, che scrivo nella seconda colonna: immediatamente incontro 8 che dee sottrarsi da 2: ho bisogno di aggiungerne 1 della cifra precedente, la quale essendo *zero*, non può dar niente, e sarà d'uopo andar innanzi sino che si trova un numero 3, il quale scemato di 1, diviene 2, ed i due zeri divengono 9, perchè da 300 tolto 1 rimane 299. E così si segue.

16. La grandezza minore dicesi *Sottraenda*. Il numero, che si ottiene, si chiama *differenza*, perchè esprime quanto quelle grandezze disuguali differiscono fra loro. Si dice ancora *avvanzo*, o *residuo*, perchè è quel che rimane, dopo che dalla grandezza maggiore si sottrae la minore. Ora se ad una grandezza si aggiunge quel che si è tolto, si riproduce la stessa grandezza. Dunque se alla *sottraenda* si aggiunge il *residuo*, e la somma eguaglia la *minuenda*; il calcolo sarà senza errore: come si osserva nell' esempio proposto (15).

Della Divisione.

17. Se poi un numero minore vuol sottrarsi più d' una volta da un numero maggiore: allora non si tien conto del solo residuo, ma del numero, ch'esprime quante volte la grandezza minore si è sottratta; e si fa uso della divisione. In questo calcolo si danno due grandezze, delle quali quella, che si divide dicesi *Dividendo*, e quella, per la quale si divide, *Divisore*. Il numero ch'

esprime quante volte il dividendo contiene il divisore, chiamasi *Quoziente*, e quello che rimane *residuo*. Il *dividendo* suole scriversi a destra, e'l Divisore a sinistra, sotto del quale si scrive il quoziente.

32 Divisore	Dividendo
209 Quoziente	66,9,4,
	64
	294
	288
	6 Residuo.

18. Voglia dividersi 6694 per 32. 1.° Si scriveranno i due fattori, come si trovano registrati 2.° Comincio il calcolo da sinistra, per dare al residuo il luogo nelle colonne seguenti, e separo tante cifre del dividendo, quante son quelle del divisore, e se la prima cifra del dividendo è minore della prima del divisore, ne prendo una dippiù. Divido dunque il primo *membro* 66 per 32, e scrivo il quoziente 2. 3.° Per questo moltiplico il divisore, e'l prodotto

64 lo sottraggo da 66, notando il residuo 2. 4° A 2 aggiungo la seguente cifra 9, e cerco dividere 29 per 32 : ma non potendo farsi, son costretto aggiunger 4, scrivendo sempre una virgola ad ogni cifra che aggiungo: allora divido 294 per 32, e scrivo il quoziente 9, ma dopo aver notato un zero, per dare ad ogni cifra del quoziente il luogo corrispondente del dividendo. 5.° Finalmente, seguendo in questo modo, eseguo la divisione; e noto in ultimo il residuo 6 indivisibile pel divisore proposto.

19. Essendo la divisione un calcolo opposto alla moltiplicazione, segue 1.° che siccome il prodotto di una moltiplicazione pareggia un fattore replicato tante volte, quante unità contiene l' altro: così il dividendo contiene tante volte il divisore, quante unità esprime il quoziente. 2.° Il quoziente del prodotto diviso per uno de' fattori pareggia l' altro fattore: e'l prodotto del divisore pel quoziente, o di questo per quello pareggia il dividendo. 3.° Per cui la moltiplicazione si esamina per la divi-

sione, e la divisione per la moltiplicazione. Così

```
 209
  32
----
 418
627
----
6688
   6 Residuo
----
6694
```

LEZIONE III.

Calcolo algebrico degl' interi.

20 I calcoli finora esposti; e tutti gli altri che si fanno co' numeri possono, per rendersi universali (5), eseguirsi con lettere. Questo è lo stile degli algebristi, che indicheremo soltanto, per non cadere nel difetto di parlare un incognito linguaggio, e non usare dottrine, che non si sieno esposte. Per la somma si servono di questo segno $+$, che si esprime

per la parola *più*: così $a + b$ si legge a più b, e vuol dire, che alla grandezza a si aggiunge l' altra b. Con queste due linette $=$ si segna l'eguaglianza: $a = b$, vuol dire che a è uguale a b. Dunque 1.° volendo sommare tutte queste grandezze a, b, c, d, basterà unirle col segno: $a + b + c + d$ è la somma di tutte le grandezze date. Ciò posto a aggiunto ad a si scriverà $a + a$: ma per non replicare la stessa lettera, si scrive una volta, e col numero 2 posto innanzi si esprime che è replicata, o sia moltiplicata per 2. Questo numero dicesi *Coefficiente*. Dunque 2.° il *coefficiente* segna quante volte è replicata una grandezza, per cui $1a = a$: che val quanto dire in ogni grandezza può concepirsi il *coefficiente* 1. Oltre il segno $+$ vi è questo $-$, che leggesi *meno*, e vuol dire che la grandezza, cui esso precede, dee sottrarsi dall' altra $a - b$, si legge a meno b, e si usa nella sottrazione. Ora ogni grandezza scemata da se stessa resta niente. Dunque 3.° $a - a = 0$. I segni $+$, $-$ danno un valore totalmente opposto; cosicchè

se la grandezza notata con + esprime un credito, quella notata con — disegna un debito: se quella esprime una distanza da oriente in occidente, l' altra vuole segnare un' eguale distanza per la parte opposta. Il segno + s' intende in quelle grandezze, che non ne hanno niuno, l' altro dee sempre esser espresso. Le grandezze, che hanno il segno +, o niuno, diconsi *positive*, e quelle col segno — *negative*.

21. Ciò posto sarà facile sommare non solamente le grandezze semplici, che diconsi *Monomj*, ma ancora le composte, o *Polinomj*. Un solo esempio che addurremo potrà esser ora bastante ad esporre il metodo da tenere, e la ragione di tutto ciò, che fa d' uopo proporre.

$$\begin{array}{r} 3a+2b+3c-n \\ 4a-b+2c-r \\ -2a+3b-5c+d \\ \hline 5a+4b-n-r+d \end{array}$$

22. In queste grandezze, non passandosi dall' unità alle decine, è cosa indiffe-

rente cominciare il calcolo da destra, o da sinistra. Cominciando intanto da sinistra, trovo tutte le *a*, sette delle quali hanno il segno +, e due —: dovrò dunque notare 5*a* (20). Indi per la stessa ragione noterò 4*b*. Non devo notar *c*, trovandosi niente (*Ivi* 3.°); ma solamente scriverò *n*, *r*, *d* co' loro segni.

23. Si noti 1.° che riesce più comodo situare tutte le lettere simili nella stessa colonna 2.° Alcune lettere, le quali hanno qualche numero a destra, di cui parleremo quì appresso, non credansi simili, se tali numeri non sono eguali. Così a^2, a^3 devono scriversi come si trovano, e col loro segno. 3.° I coefficienti si calcolano colle regole de' numeri.

24. Una grandezza, cui precede il segno —, dovendo scemarsi da un' altra (20), con esso si esegue la sottrazione: $a-b$ vuol dire *b* sottratta da *a*. Ma se da *a* voglio sottrarre $-b$ dovrò scrivere $a+b$. Se uno ha centodieci, ed un debito di dieci: il suo capitale è cento $110-10=100$. Se poi questo debito si cassa, acquista 10, e

tutto il suo sarà 110. Dunque sottrarre $-b$ da a è lo stesso, che aggiunger b ad a.

ESEMPIO.

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a-b \\ a^2+2ab+\ \ b^2-b^3+a+b \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3-a^2-2ab-b^2-2b \end{array}$$

25. Cominciando anche da destra, e non incontrando grandezze simili sino a b^3, le scriverò come si trovano. Dovendo poi sottrarre $-b^3$, è lo stesso che aggiungerlo alla grandezza simile superiore (24): onde scrivo $2b^3$ (20). Per la stessa ragione non iscrivo a; ma solamente $-a^2$ $-2ab-b^2-2b$, mutando i loro segni: e la sottrazione si riduce all' addizione, prendendo le sottraende col segno contrario. E qui dee notarsi, che le sottraende possono esser maggiori delle minuende: il residuo sarà col segno $-$. Potrebbe egualmente intendersi de' numeri. Se un debitore ha data una somma maggiore del debito, diviene egli creditore.

Della Moltiplicazione.

26. $2a$ esprime a replicata volte 2 (20). Dunque ab esprime b replicata volte a. Dunque 1.° le grandezze algebriche si moltiplicano, unendosi insieme senza verun segno intermedio, volendo moltiplicare a per a, nasce aa: per maggior brevità si aggiunge un numero a destra un poco sopra la lettera, che dicesi *Esponente*; onde $a^2 = aa$. Ora siccome a^2 esprime a moltiplicata per a una volta; a^3 esprime a moltiplicata per a due volte; $a^3 = aaa$. Dunque 2.° L'esponente esprime il numero delle volte, che una grandezza è moltiplicata in se stessa meno una. 3.° Perciò a^1 equivale ad a moltiplicata in se stessa niuna volta; ed ogni grandezza può concepirsi coll' esponente 1. Inoltre moltiplicando aaa per aa nasce $aaaaa$, $aaa = a^3$, $aa = a^2$, ed $aaaaa = a^5$. L' esponente di quest' ultima grandezza pareggia la somma degli esponenti de' due fattori. Dunque 4.° siffatte grandezze che diconsi *Potenze* si moltiplicano, sommando

gli esponenti. Le potenze prendono il nome dal loro esponente; a^1 è la *potenza prima*, o sia *Radice*, a^2 *potenza seconda*, o *Quadrato*, a^3 *potenza terza*, o *Cubo ec.*

27. In quanto ai segni, le grandezze che voglion moltiplicarsi, si legano con questo segno $\times$: così $a\times b = ab$, la prima espressione indica, che a vuol moltiplicarsi per b, e la seconda, che già si è moltiplicata: o pure con un punto solo $a \,.\, b = ab$ Ora dovendo moltiplicare a per b, è chiaro che il prodotto sarà $ab = +ab$ (20): ma volendo moltiplicare $-a$ per b, o pure a per $-b$, la cosa va altrimenti. Nel primo caso replico una grandezza negativa tante volte, quante unità contiene la positiva b; e nel secondo nego la positiva a tante volte, quante unità contiene la negativa b: dovrà dunque nascere $-ab$, prodotto negativo. Moltiplicandosi poi $+$ per $+$, il prodotto sarà positivo, perchè una grandezza positiva infatti si replica. Sarà ancora positivo, moltiplicando $-$ per $-$, perchè quelche manca, moltiplicandosi per una grandezza negativa, non si ripete, ma

replicatamente si nega. Dunque evidentemente si scorge, che i segni simili danno +, e i dissimili —.

$$\begin{array}{l}a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a^2-2ab+b^2\\ \hline a^5+3a^4b+3a^3b^2+a^2b^3\\ \quad -2a^4b-6a^3b^2-6a^2b^3-2ab^4\\ \qquad\qquad a^3b^2+3a^2b^3+3ab^4+b^5\\ \hline a^5+a^4b-2a^3b^2-2a^2b^3+ab^4+b^5\end{array}$$

28. Sarà ora facile moltiplicare tutt' *monomj* non solamente; ma anche gli annessi *polinomj*, e tutti gli altri. Comincio a moltiplicare tutta la fila superiore per la prima grandezza dell' inferiore, ed avrò il prodotto tutto positivo, perchè sempre si moltiplica +, per +, (27): gli esponenti di esso sono le somme degli esponenti de' fattori, ed i *coefficienti* quelli del moltiplicando polinomio, perchè l' altro fattore non ne ha niuno, o s' intende l' unità (20), che non moltiplica. Il prodotto, che nasce dalla moltiplicazione per la seconda

grandezza, deve esser tutto negativo, perchè si moltiplica sempre + per — : ed i *coefficienti* sono i prodotti de' coefficienti de' fattori. Il terzo è come il primo. E la somma di essi è il prodotto de' due dati fattori.

Della Divisione.

29. Nella divisione han luogo tutte le regole proposte per la moltiplicazione in quanto ai segni, agli esponenti, che si sottraggono, ed ai coefficienti, che si dividono, come gli altri numeri. Il più delle volte si segna la divisione con due punti tra 'l dividendo, e 'l divisore, o pure con una lineetta orizzontale per mezzo. Così $a : b$, o pure $\frac{a}{b}$.

Dividendo.	*Divisore*
$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$	$a + b + c$
$-a^2 - ab - ac - b^2 - bc - c^2$	$a + b + c$
$0 + ab + ac\ 0 + bc\ 0$	
$-ab\ -ac\ \ -bc$	

30. Dividendo a^2 per a, il quoziente sarà a (29). Per esso moltiplico tutto il divisore, scrivo i prodotti alle lettere che le corrispondono nel dividendo, e cambio i segni, dovendo fare la sottrazione. Divido per la stessa prima lettera del divisore il primo residuo, avrò $+b$. Seguito il calcolo allo stesso modo, dividendo sempre per quella lettera, per la quale l' ho cominciato.

31. Siccome si moltiplicano le potenze, sommando i loro esponenti (26: 4.°) così si dividono, sottraendo gli esponenti: $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$. E perciò $a : a = a^{1-1} = a^0 = 1$. Dunque 1.° una grandezza coll' esponente *zero* pareggia l' unità. Per la stessa ragione $a^2 : a^3 = a^{-1} = \frac{1}{a}$. Dunque 2.°

una grandezza coll' esponente negativo pareggia l' unità divisa per la grandezza collo stesso esponente, ma col segno positivo.

LEZIONE IV.

De' rotti numerici, ed algebrici.

32. BEn pochi sono i casi, ne' quali dividendo un numero per un altro, o due grandezze letterali, non resta qualche parte indivisibile: si ricorre allora ai *Rotti*, co' quali si esprime una divisione ineseguibile, come si è avvertito (29). Dunque 1.° in ogni rotto entrano due grandezze; dividendo, e divisore; il dividendo scrivesi sopra una lineetta, e dicesi *Numeratore*; il divisore scrivesi sotto, e dicesi *Denominatore* $\frac{a}{b}$, a è numeratore, ed intendesi diviso per b, che è il denominatore. 2.° Dunque il numeratore è sempre minore del denominatore; e 'l rotto è minore dell'uni-

tà. Si trovano però i *rotti improprj*, ne' quali il numeratore è maggiore del denominatore, e tali rotti sono maggiori dell' unità: così $\frac{10}{4}$. In tal caso il numeratore può dividersi pe 'l denominatore, e non sarebbe stato necessario ricorrere ad un rotto; aavrebbesi avuto il quoziente 2 col residuo 2, che formava un intero con rotto $2\frac{2}{4}$, *due*, e *due quarti*. 3.° Dunque un rotto improprio si riduce ad un intero, dividendo il numeratore pe 'l denominatore. 4.° Onde se il numeratore è uguale al denominatore, il rotto è equivale all' unità 5°. L' unità non dividendo una grandezza; in ogni grandezza può concepirsi l' unità per denominatore, senza che si alteri il suo valore: così $\frac{a}{1} = a$. Finalmente $\frac{3}{4}$ esprime 3 diviso per 4, o pure l' unità divisa in quattro parti, di cui tre ne contiene il rotto. Dunque 6.° il denomi natore esprime le parti in cui l' unità è divisa, e 'l numeratore quelle, che il rotto contiene.

33. Se qualunque grandezza si suppon-

divisa in due parti, in quattro, in sei, otto; e delle prime due parti se ne prende una, delle quattro due, delle sei tre, delle otto quattro: sempre si prende la metà della grandezza . . . $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$. Dunque 1.° moltiplicando, o dividendo il numeratore, e 'l denominatore di un rotto per un medesimo numero, non si altera il valore del rotto. Per lo contrario questi rotti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, esprimendo una porzione di una stessa grandezza divisa successivamente in 2, 3, 4, 5 parti, vanno sempre scemando. Dunque 2.° i rotti, che hanno lo stesso numeratore sono tanto minori; quanto è maggiore il denominatore. (Appresso diremo, esser tai rotti in ragione inversa de' denominatori). Questi altri poi van sempre crescendo $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$ ec.. Onde 3.° i rotti che han lo stesso denominatore, crescono, secondo si aumenta il numeratore (sono in ragione de' numeratori. E combinando questi due teoremi: I rotti sono in ragione diretta de' numeratori, ed inversa de' denominatori).

34. Da ciò si rileva, che un rotto non

può valutarsi, se non confrontando il numeratore col denominatore. Dati quindi varj rotti, riesce difficile conoscere il loro valore, e distinguere il maggiore dal minore. Si è però trovato un facilissimo metodo, a togliere ogni difficoltà, il quale consiste nel moltiplicare tanto il numeratore, quanto il denominatore di ciascuno pe' denominatori degli altri. Sieno $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{7}$; si trasformeranno in questi $\frac{189}{315}$, $\frac{210}{315}$, $\frac{180}{315}$. Ne' quali subito si scorge, che il secondo è il massimo, il terzo il minimo (32. 3.°). Si scorge ancora, che il metodo proposto riduce tutt' i rotti allo stesso denominatore. Come si riducono allo stesso denominatore i rotti numerici; si riducono ancora gli algebrici. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ equivagliono a questi . . . $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$

35. Riducendosi i rotti allo stesso denominatore, si scorge qual di essi sia maggiore; ma essendo ciascuno espresso con più cifre, o lettere, si cresce la difficoltà di conoscere il valore di ciascuno. Dee

dunque cercarsi di ridurlo alla minor espressione possibile, dividendo il numeratore, e'l denominatore per la stessa grandezza (33. 3°.). Si possono tenere varie regole. 1.° Se il numeratore, e 'l denominatore finiscono in o, si dividano per 10, i due quozienti, che saran senza residuo, sono le due grandezze del rotto eguale al dato. 2.° Se sono pari, si dividano per 2. 3.° se finiscono in 5, si dividano per 5. Siccome tutt'i numeri, che finiscono in o, sono *multipli* di 10, così in conseguenza della nostra *Aritmetica Denaria*, i *Multipli* di 5 finiscono in 5. Ma se con tali mezzi compendiarj non si trovano i numeri di un rotto divisibili senza residuo, bisogna ricorrere al motod' ordinario, per trovare la *Massima comune misura*. Se con questo nemmeno si arriva, i due numeri, che formano il rotto, sono irreducibili, e si chiamano *Primi frà loro*. Sia il rotto $\frac{248}{386}$.

386
248
138
110
28
26
2

Il metodo è questo : Si divida il maggiore pe 'l minore, e si noti il residuo 138, per esso si divida il superiore, e si ha il residuo 110. Così seguendo si trova 2, che divide 26 senza residuo. 2 è la massima comune misura, o *aliquota comune*. In lettere il calcolo è più facile; poichè basterà togliere le lettere simili.

Sommare, e sottrarre i rotti.

36. Se a $\frac{2}{4}$ aggiungo $\frac{2}{4}$, avrò $\frac{4}{4}=1$. Dunque 1.° se i rotti hanno lo stesso denominatore, si sommano facilmente, sommando i loro numeratori. 2.° Se poi non hanno lo stesso denominatore, si riducano

(133) e si sommino. 3.° Finalmente se ai rotti ci sono annessi degl' interi, si riducano gl' interi a rotti, ed indi allo stesso denominatore. Sieno

questi $3 + \frac{2}{5}a + 4\frac{1}{2} + \frac{5}{9} + b + c$

questi corrispondono a questi

$$\frac{3}{1}(31 . 5.°) + \frac{2a}{5} + \frac{9}{2} + \frac{5}{9} + \frac{b}{1} + \frac{c}{1},$$

che si riducono

$$\frac{270}{90} + \frac{36a}{90} + \frac{405}{90} + \frac{50}{90} + \frac{90b}{90} + \frac{90c}{90} = \frac{36a + 90b + 90c + 725}{90}$$

Tutto è chiaro; ma la terza grandezza essendo composta d' un intero, e di un rotto, si riduce a rotto, moltiplicando l' intero pe'l denominatore. Poichè scrivendosi il denominatore, si suppone diviso; affinchè dunque non si alteri il suo valore, è necessario moltiplicarlo.

37. Per la sottrazione non rimane cosa d' aggiungere. Sieno

$5\frac{2}{3} - \frac{1}{2}a$. Abbiamo $\frac{17}{3} - \frac{a}{2}$, o pure

$$\frac{34}{6} - \frac{3a}{6} = \frac{34 - 3a}{9}$$

Della Moltiplicazione, e divisione de' rotti.

38. Per moltiplicare, o per dividere i rotti, basterà moltiplicare, o dividere i numeratori, e i denominatori fra loro $\frac{9}{11} \times \frac{5}{7} = \frac{45}{77} \ldots \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Se si osserva il rotto numerico, si scorge il prodotto minore del moltiplicando; nè altrimenti può succedere, perchè moltiplicando $\frac{9}{11}$ per $\frac{5}{7}$, si moltiplica per una grandezza minore dell'unità, o sia si prende meno di una volta.

39. Allo stesso modo per dividere i rotti $\frac{15}{20} : \frac{3}{5} = \frac{5}{4}$, questo quoziente supera l'unità (51. 2°), e perciò supera il dividendo, che è rotto vero: ma se si riflette, che la divisione si oppone alla moltiplicazione s'intenderà questo caso, come il precedente. Il dividendo contiene più di una volta il divisore.

40. Ma rade volte le grandezze del di-

videndo sono esattamente divisibili per quelle del divisore: posso però sempre ridurcele, moltiplicando il numeratore, e denominatore del dividendo pe 'l numeratore, e denominatore del divisore, ed indi fare la divisione . . . $\frac{3}{6} : \frac{4}{7}$ si riduce a $\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} \therefore \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $= \frac{ad}{bc}$. Vale a dire bisogna moltiplicare il dividendo pe 'l divisore cambiato.

41. Volendo dividere i rotti proposti, come se fossero interi (29), un rotto formerà il numeratore, e l'altro il denominatore. Ecco i rotti, che hanno il numeratore, e denominatore rotto $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ sarà eguale a $\frac{ad}{bc}$ (39), cioè 1.° se un rotto ha numeratore, e denominatore rotto, si trova il suo valore in un altro rotto, moltiplicando il numeratore del numeratore pe 'l denominatore del denominatore, e 'l denominatore del numeratore pe 'l numeratore

del denominatore. Se poi vorrassi dividere un intero per un rotto . . $a : \frac{b}{c}$, si potrà l'una, e l'altra grandezza esprimere per un rotto solo $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{ac}{b}$. 2.° Si moltiplica l'intero pe'l denominatore del rotto, e si ha il nuovo numeratore. Finalmente volendo dividere un rotto per un intero. $\frac{a}{b} : c$, si scriverà . . $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$. Onde 3.° moltiplicando il denominatore del rotto per l'intero, si trova il denominatore. Si può osservare, che la lineetta più lunga separa il numeratore dal denominatore, e la più corta il dividendo dal divisore.

LEZIONE V.

De' Decimali.

42. I rotti che hanno per denominatore 10, o qualunque potenza di questo numero, diconsi *Decimali*: così.... $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{12}{1000}$. Ora per evitare i rotti, si è convenuto sopprimere il denominatore, indicando con una virgola nel numeratore il numero degli zeri, che s'intendono nel denominatore dopo l'unità; ed i rotti proposti si esprimono in questo modo... 0,3 0,05 ....0, 012, ne' quali si scorge, che il numero di quelle cifre essendo minore degli zeri, che si concepiscono nel denominatore, si sono aggiunti nel numeratore altri zeri dopo la virgola. Ridotti in tal modo, non si calcolano come rotti, ma come interi. Un solo esempio per ciascuna operazione basterà a dichiarare tutto il calcolo.

Esempio dell' addizione.

3,57934
0,062
0,00006
9,538
―――
13,17940

43. Si scrivano tutt' i numeri in modo, che le virgole occupino tutte la stessa colonna, e così trovansi corrispondenti i loro denominatori: poichè quanti luoghi i numeri passano innanzi, tanti zeri si aggiungono ai denominatori sottintesi. Indi si sommano, e nella somma la virgola si nota nella stessa colonna.

44. Lo stesso si pratica per la sottrazione, come si osserva nell' annesso

Esempio

82 , 04652
0 , 975
81 , 07152

Esempio della moltiplicazione

56 , 3742
9 573
1691226
3946194
2818710
5073678
5396,702166

45. Nella moltiplicazione non è necessario osservar l' ordine delle virgole, e basta dal prodotto separar tanti decimali, quanti sono ne' fattori insieme presi. Poichè siccome per moltiplicare i rotti ordinarj, basta molţiplicarli senza ridurli allo

stesso denominatore: così non è necessario ne' decimali aggiungere gli zeri all' unità de' loro denominatori. Ed operando nel modo proposto, si trovano moltiplicati i numeratori, ed i denominatori.

Esempio I. della divisione

```
   2,42    56,37·4·5·
  ------
  23,29    484
           ---
            797
            726
            ---
             714
             484
             ---
             2305
             2178
             ----
              127
```

46. Divisi al solito i numeri, dal quoziente separo tante cifre, quante il dividendo ne contiene più del divisore. Se

poi al residuo 127 si aggiungono alcuni zeri, si avrà il quoziente con maggiori decimali più prossimo al vero. Se finalmente il divisore ha più decimali del dividendo, si aggiungono al dividendo alcuni zeri. Voglia dividersi 5634,57 per 4,3683

Esempio II.

4,5683	5634,5·7·0·0·0·0·0·
1283,40	4568 3
	106627
	91366
	152610
	137049
	155610
	137049
	185610
	182732
	28780

47. Essendo un rotto una vera divisione del numeratore pe 'l denominatore; per ridurre un intero a rotto dovrà l' intero moltiplicarsi per quella grandezza, che vuolsi per denominatore. Ora un numero si trova moltiplicato per 10, 100 ec. aggiungendo uno o due zeri. Dunque un intero si riduce a decimale, aggiungendo dopo una virgola que' zeri, che si vorranno ... 5=5,0=5,00. .... 71=71,000.

48. Essendo $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$ (33.2°) $=\frac{5}{10}$ (*Ivi*) $=5.0$ (42). Un rotto si riduce a decimale, coll' aggiungere al numeratore tanti zeri, quanti decimali si vogliano, e poi dividerlo pe 'l denominatore. Non ogni rotto è riducibile a qualunque decimale ... $\frac{1}{4}$ non può ridursi a decime: ma essendo 100 divisibile per 4, si riduce a centesime, senza mutare il suo valore ... $\frac{4}{10}=\frac{25}{100}=$ 0,25. Alcuni però sono assolutamente irreducibili, come $\frac{1}{3}$, e tanti altri, de' quali può aversi solamente un decimale prossimo al vero valore (a).

(a) Nel commercio è frequentissimo l' uso di

LEZIONE VI.

Caratteri d' eguaglianza delle grandezze secondo varie combinazioni.

49. Assioma I. Ogni grandezza è eguale a se stessa.

50 Assioma II. Le grandezze eguali son tali, che una può mettersi in vece dell' altra.

51. Sia $a=b$, $a=c$: potendosi metter c in vece di a (50), sarà $b=c$. Dunque 1.° se due grandezze sono eguali ad una stessa: sono eguali fra loro. E all'opposto 2.° se due grandezze sono eguali, ed una

altri numeri, che noi non trattiamo nelle nostre lezioni dirette soltanto all'intelligenza della Matematica, e della Fisica. Occorrerà in Geometria, e nell'Astronomia il calcolo de' gradi, e de' minuti: ma desso è tanto facile, che senza particolare istituzione intenderassi facilmente quanto sarem per dire su tal proposito.

terza è eguale ad una di quelle : è eguale anche all' altra.

52. Essendo $a=a$, $2a=2a$, $3a=3a$ (49) e $2a=a\times 2$, o sia il doppio di a, $3a=a\times 3$(20). Dunque 1.° i doppj, i tripli ec. di una, o più grandezze eguali : sono eguali. E generalmente : Se le grandezze eguali si moltiplicano per una qualunque, o per eguali: i prodotti sono eguali. Al contrario, 2.° le metà, terze, quarte parti etc. di una grandezza, o di più eguali : sono eguali. Ed in generale : Le grandezze eguali divise per una stessa ; o per eguali, danno quozienti eguali.

53. Sia $a=b+c$: sarà $ma=mb+mc$ (26, e 52). E se fosse $a=b+c+d$, sarebbe, $ma=mb+mc+md$. Ora a si può concepire come la somma di b, c, d, o pure b, c, d come parti di a. Dunque 1.° il prodotto di più grandezze per una qualunque pareggia il prodotto della somma di quelle moltiplicate per la stessa. 2.° Se una grandezza è divisa in qualunque numero di parti, e si moltiplica per un altra : il prodotto di essa eguaglia il prodotto delle

sue

sue parti moltiplicate per quella.

Sia $a=10$, $m=5$, $b=7$, sarà $c=3$. $ma=50$, $mb=35$, $mc=15 \ldots 35+15=50$.

54. Dunque la differenza de' prodotti tra una grandezza, ed una sua parte moltiplicata per una terza pareggia i prodotti delle altre parti moltiplicate per la stessa. $ma-mb=mc \ldots 50-35=15$. Le grandezze, che si trovano legate col segno d' eguaglianza, formano un' *Equazione*, e tali grandezze si chiamano *Termini*, o *Membri* dell' equazione. Ora confrontando questa colla precedente equazione, si trova 35 nella prima col segno +, e nella seconda col segno —; nella prima è nel secondo membro, e nella seconda nel primo. Dunque 1.° quando si fa la *Trasposizione* delle grandezze, cioè si passano dall'uno all'altro membro, devono mutarsi i loro segni.

55. Nella stessa ipotesi (53) sia dippiù $m=a$; sarà $ma=a^2$, $mb=ab$, $mc=ac$: e perciò $a^2 = ab+ac$ (Ivi). Dunque 1.° il quadrato di una grandezza pareggia il prodotto di essa nelle sue parti. E se $m=b$; sarà $ma=ab$, $mb=b^2$, $mc=bc$. Onde $ab=b^2+$

bc. Dunque 2.° il prodotto di una grandezza in una sua parte pareggia il quadrato di detta parte insieme co' prodotti della stessa parte moltiplicata per l'altre parti. Sia $a = 10$, $b = 7$, sarà $c = 3$.
1.° $a^2 = 100$, $ab = 70$; $ac = 30$.
2.° $ab = 70$, $b^2 = 49$, $bc = 21$.

56. Per la prima supposizione $a^2 = ab + ac$, per la seconda $ab = b^2 + bc$; ed $ac = c^2 + bc$... perciò sarà $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$ Dunque 1.° il quadrato di una grandezza pareggia la somma de' quadrati delle parti nel doppio prodotto di esse parti. O pure: Il quadrato della somma di due grandezze pareggia la somma de' quadrati di esse nel doppio del loro prodotto. E supposto $b = c$, bc sarà il quadrato di b, e $b^2 = c^2$: onde sarebbe $b^2 + 2bc + c^2 = 4b^2$ Dunque sarà 2.° il quadrato di una grandezza è il quadruplo del quadrato della metà. 3.° Dunque il quadrato di una grandezza è doppio del prodotto di essa per la metà: il prodotto di tutta per la metà è doppio del quadrato della metà (55).

1.° $10 \times 10 = 7 \times 7 + 3 \times 3 + (3 \times 7) \times 2$.
2.° $10 \times 10 = 5 \times 5 \times 4$.
3.° $10 \times 10 = 10 \times 5 \times 2$, $10 \times 5 \times \times 5 \times 2$.

57. Da ciò si deduce 1.° che il quadrato della somma di due grandezze è sempre maggiore della somma de' quadrati di esse nel doppio del loro prodotto: onde la differenza di tali somme è tanto maggiore, quanto la differenza delle grandezze; sebbene le differenze delle grandezze non sono eguali alle differenze de' quadrati. Ed ora sia di più $a > b$ . . . $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ sarà la metà della somma, e $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ metà della differenza: ma $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = a$; $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = b$. Dunque 2.° la metà della somma, e la metà della differenza prese insieme pareggia la grandezza maggiore; la metà della somma diminuita della metà della differenza pareggia la minore. Onde 3.° Se x, y sono due grandezze ignote, a la loro somma, b la differenza; sarà $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

58. Sia $a = b$; sarà $a^2 + 2ab + b^2 = 4a^2$ (56.2°). Il quadrato di una grandezza è quadruplo del quadrato della metà. E se $a = b = c$;

sarà $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2=9a^2$. Il quadrato di una grandezza è nonuplo del quadrato della terza parte. Onde se le radici sono 1, 2, 3 etc., i quadrati saranno 1, 4, 9 ec.

59. Sia il binomio $a+1$; sarà $(a+1)^2 = a^2+2a+1$ (56. 2.°). Dunque 1.° il quadrato prossimo maggiore supera il prossimo minore nel doppio del prodotto della radice minore, e 1 dippiù. 2.° $1=1^2$, $1+2+1=4$, quadrato di 2.. $4+4+1=9$, $9+6+1=16$. E così colla sola addizione posson formarsi tutti i quadrati de' numeri interi naturali 1, 2, 3, 4, 5 etc.

60. $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, e $\frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Paragonando tali quadrati, si trova la loro differenza eguale a $\frac{4ab}{4} = ab$. Dunque 1.° il quadrato della metà della somma di due grandezze supera il quadrato della metà della loro differenza nel

prodotto di esse grandezze. E supponendo quelle due grandezze insieme prese eguali ad una 2.° Il quadrato della metà di una grandezza supera il quadrato della metà della differenza tra le parti diseguali nel prodotto di esse parti. Il prodotto delle grandezze è sempre minore del quadrato della metà della somma nel quadrato della differenza: o il prodotto delle parti diseguali di una grandezza è minore del quadrato della metà di essa nel quadrato della differenza tra la metà ed una delle parti; e tanto minore quanto la differenza delle grandezze, o delle parti ineguali è maggiore. Dunque 3.° il massimo prodotto delle parti di una grandezza si ha dividendo la grandezza in parti eguali. 4.° E degli altri è maggiore quello, che è formato da parti meno differenti.

Sia $a=6$, $b=4$. $\frac{6+4}{2}=5$, $\frac{a-b}{2}=\frac{6-4}{2}=1$:

$$1.° \quad 5\times 5 = 6\times 4 + 1\times 1$$

$$3.° \quad 6\times 4 > 7\times 3.$$

62. E facendo il quadrato della differenza si avrà $a^2 - 2ab + b^2$. Dunque

1.° il quadrato della somma supera il quadrato della differenza nel quadruplo del prodotto delle grandezze. E moltiplicando la metà della somma per la metà della differenza, si avrà $\frac{a^2 - b^2}{4}$. 2.° Il quadruplo del prodotto della metà della somma per la metà della differenza manca dal quadrato della grandezza maggiore nel quadrato della minore. 3.° E 'l prodotto della somma per la differenza è ... $a^2 - b^2$, il quale manca dal quadrato della grandezza maggiore nel quadrato della minore. 4.° Dunque se dal quadrato della grandezza maggiore si sottrae il prodotto della somma per la differenza, si ha il quadrato della minore; e se al quadrato della grandezza minore si aggiunge lo stesso prodotto, si trova il quadrato della maggiore. 5.° La somma de' quadrati uno della somma, e l' altro della differenza di due grandezze è ... $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2 = (a^2 + b^2) \times 2$, che pareggia il doppio de' quadrati delle grandezze. E la somma de' quadrati, uno della metà

d

della somma , e l' altro dalla metà della differenza è ... $\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4}=$

$\frac{2a^2+2b^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$. 6.° Dunque la somma de' quadrati di due grandezze è doppia della somma de' quadrati, uno della metà della somma, delle grandezze, e l' altro della metà della loro differenza 7° E' perciò la somma de' quadrati, uno della somma, e l'altro della differenza è quadrupla de' quadrati della metà della somma, e della metà della differenza. 8.° La differenza de' quadrati uno della somma delle grandezze, e l' altro della loro differenza è $4ab$: quadrupla del prodotto.

Sia nuovamente ... 6. 4. Sarà

1.° $10\times10-2\times2=6\times4\times4$

2° $5\times1\times4=6\times6-4\times4$

3.° $(6+4)\times2=6\times6-4\times4$

4.° $6\times6-10\times2=4\times4$

Sia la grandezza maggiore a, la minore x, il prodotto della somma per la differenza c. Sarà $a^2-c^2=x$, ed all' opposto

5.° $10\times10\pm2\times2=6\times6\times2+4\times4\times2$

6.° $6 \times 6 + 4 \times 4 = (5 \times 5 + 1 \times 1) \times 2$
7.° $10 \times 10 + 2 \times 2 = (5 \times 5 + 1 \times 1) \times 4$
8.° $10 \times 10 - 2 \times 2 = 6 \times 4 \times 4$.

62. Si faccia ora il quadrato di $\frac{1}{2} a + b$, si ha $\frac{1}{4} a^2 + ab + b^2 = (a + b) \times b + \frac{1}{4} a^2$. Dunque 1.° il quadrato della somma della metà di una grandezza, e di un' altra supera il prodotto della somma delle grandezze per questa nel quadrato dell' altra metà. E.... $((a+b) \times b) \times 2 = 2ab + 2b^2$ manca da $(a + b)^2$ in a^2 e lo supera in b^2, 2.° Dunque il doppio del prodotto della somma di due grandezze per una pareggia la differenza de' quadrati della somma, e di una delle grandezze insieme prese, e 'l quadrato dell' altra.. Al quadrato $\frac{1}{4} a^2 + ab + b^2$ si aggiunga $\frac{1}{4} a^2$, quadrato di $\frac{1}{2} a$; avremo $\frac{1}{2} a^2 + ab + b^2 = \frac{a^2 + 2ab + 2b^2}{2}$ $= \frac{(a + b)^2 + b^2}{2}$. Dunque 3,° la somma de' quadrati uno della somma di due grandezze, e l' altro da una di esse è doppia della somma de' quadrati uno della metà di una grandezza, e l' altro della metà

della stessa, e dell' altra grandezza insieme prese. E concependo la somma come una grandezza, ed esse come parti di quella il n.° 2.° dà il 4.° La somma de' quadrati di una grandezza, e di una sua parte supera il doppio prodotto della grandezza per detta parte nel quadrato dell' altra parte. Inoltre ciascuna grandezza è differenza tra la somma, e l' altra grandezza. Dunque 5.° La somma de' quadrati di due grandezze supera il quadrato della differenza nel doppio prodotto di esse.

Sieno al solito . . . 6 . 4

1.° $(3+4)^2 - 3\times3 = (6+4)\times4$

2.°$((6+4)\times4)\times2 = (6+4)^2 + 4\times4 - 6\times6$

3.°$(6+4)^2 + 4\times4 = ((3\times3 + (3+4)^2)\times2$

63. Potrebbero ancora in altre guise combinarsi due grandezze; e si avrebbero nuovi risultati: altri nascerebbero dalla varia combinazione di tre o più grandezze, considerando i soli quadrati, o potenze superiori. Ma le addotte dottrine sono sufficienti, e più proprie a questo luogo. Da esse risulta, che siccome non si altera l' equazione moltiplicando l' uno, e l' altro

membro per la stessa grandezza : così se amendue si elevano alla stessa potenza, ò se n' estrae la stessa radice. Resta ancora l' eguaglianza se da amendue i membri si sottrae la stessa, ò grandezze eguali.

LEZIONE VII.

Delle Potenze, e Radici delle grandezze.

64. Essendo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$, (59. 1.° 2.°) : può chiaramente osservarsi 1.° Che il primo membro del quadrato è il quadrato del primo membro della radice, il secondo il doppio prodotto del primo membro della radice pe 'l secondo della stessa radice. 2.° Ogni quadrato è formato da' quadrati di tutte le grandezze, e dal doppio prodotto di esse moltiplicate due a due.

60. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ e $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c +$

d 2

$3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$,. Ne' quali cubi si trova per primo membro il cubo del primo membro della radice; il secondo è il triplo del quadrato della prima grandezza moltiplicata per la seconda ec. 2.° Il cubo di qualunque polinomio formasi da' cubi di tutte le grandezze, e da' prodotti del triplo de' quadrati di esse moltiplicati per l' altre ec.

66. Da' quali risultati può formarsi il canone generale per la formazione di qualunque potenza. 1.° Il primo membro è la stessa potenza del primo membro della radice, il secondo è il prodotto della potenza della radice inferiore di un grado alla potenza cercata, per lo secondo membro moltiplicato per l' esponente della potenza. 2.° E tutt' i termini della radice sono elevati alla stessa potenza.

67. Questo ha dato luogo ad un altro più distinto, e preciso, per innalzare a qualunqoe potenza un binomio 1. Il primo termine della radice si scriva coll' esponente della potenza cercata: e sarà il primo membro della potenza stessa. 2.°

La stessa grandezza elevata successivamente ai gradi inferiori si moltiplichi pe 'l secondo membro della radice, elevata a tutt' i gradi, ma con ordine inverso, cominciando da 1 sino all' esponente della potenza. 3.° Il primo membro non ha coefficienti; il coefficiente del secondo è l' esponente del primo: e si trova negli altri, dividendo pe 'l luogo che occupa, il prodotto del coefficiente per l' esponente del termine precedente. Ecco la formola;

$$\begin{array}{cccccc} a^m & a^{m-1} & a^{m-2} & a^{m-3} & a^{m-4} & 1 \\ 1 & b^{m-4} & b^{m-3} & b^{m-2} & b^{m-1} & b^4 \end{array}$$

$$a^m \; a^{m-1}b^{m-4} \; a^{m-2}b^{m-3} \; a^{m-3}b^{m-2} \; a^{m-4}b^{m-1}$$

$$a^m \pm \frac{1}{m} a^{m-1} b^{m-4} \pm \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^{m-3} \pm$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^{m-2} \pm \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$a^{m-4} b^{m-1} \pm \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 \cdot m-4 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^4 .$$

68. Volendo dunque innalzare $a + b$ alla potenza indeterminata m; 1.° Si formino due serie una con a, l' altra con b; il pri-

mo termine della serie formata da a abbia per esponente m, il secondo $m-1$, il terzo $m-2$ ec L' altra serie cominci da 1, segua b collo stesso esponente dell' ultimo termine di a, e vada aumentando con ordine inverso, sintantochè l' ultimo termine abbia l' esponente del primo termine della prima serie. 2.° Situati i termini uno sotto l' altro, si moltiplichino, come si trovano uno per uno. 3.° Il primo termine non ha coefficiente, il secondo vuole l' esponente del primo, e gli altri si trovano come s' è cennato. 4.° Se amendue i termini della radice sono positivi, tutt' i termini della potenza sono positivi. Se i termini della radice sono negativi, e positivi; saranno negativi nella potenza tutt' i termini, che hanno la grandezza negativa coll' esponente dispari, e tutti gli altri sono positivi. La formola per la quarta potenza del binomio $a+b$ servirà di schiarimento.

a^4	a^3	a^2	a^1	1
1	b^1	b^2	b^3	b^4
a^4	$a^3 b$	$a^2 b^2$	ab^3	b^4

$$a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

59. Volendo poi qualunque potenza di un polinomio, $a + b + c \ldots$ si faccia $b + c = q$; si trovi la potenza di $a + q$, e si sostituiscano i valori delle grandezze date. Se ne propone un esempio, che può facilmente bastare.

a^4	a^3	a^2	a^1	1
1	q^1	q^2	q^3	q^4

$$a^4 + 4a^3 q + 6a^2 q^2 + 4aq^3 + q^4$$

La quale somministra l' altra formola per $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3 b + 4a^3 c + 6a^2 b^2 + 12abc + 6a^2 c^2 + 4ab^3 + 12ab^2 c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3 c + 6b^2 c^2 + 4bc^3 + c^4$.

Può egualmente discorrersi de' numeri.

$$\begin{array}{r} 90000 \\ 24000 \\ 3600 \\ 1600 \\ 480 \\ 36 \\ \hline 119716 \end{array} = 346 \times 346$$

70. Dovendosi formare il quadrato del numero proposto 346, lo concepisco come un polinomio 300 + 40 + 6. Formando tre quadrati, e tre prodotti (56), questi disposti come si veggono, mi daranno nella somma il quadrato ricercato. Con piccola riflessione comprendesi 1.° Il quadrato di 300 ha per prima cifra il quadrato di 3, e 'l quadrato di 60 ha nelle due prime cifre il quadrato di 6: ma nè l'uno, nè l'altro si trovano nella somma tali quali, essendo confusi coll' altre grandezze. 2° Siccome il quadrato di un trinomio è composto di sei membri, così il quadrato di una radice di tre numeri

dovrebbe esser sempre formato di sei numeri: ma perchè i quadrati de' tre primi numeri semplici, possono esser ancora numeri semplici; potranno bastar talvolta anche cinque numeri. 3.° Ecco come colla addizione, e colla moltiplicazione de' soli numeri semplici può formarsi ogni quadrato numerico. Si sono escogitati altri metodi, che noi tralasciamo. Formando l'altre potenze di numeri, si trovano ancora gli stessi risultati, che si osservano nella formola (70). Sarà ora facile estrarne le radici (*a*).

(a) La formola proposta, e l'applicazione ai numeri (70, 71) può somministrarci il metodo, da ridurre ogni numero composto al seguente polinomio. $10^{m}a + 10^{m-1}b + 10^{m-2}c + 10^{m-3}d$ &c. $+ n$, le lettere a, b, c, d &c. esprimono un numero semplice. Così nell'esempio proposto 346 . . . a esprime il numero 3, e 10^{m} è lo stesso che 10 × 10., giacchè nella nostra aritmetica tutt'i numeri rapresentano qualche potenza di 10. Il profondissimo Ab. Marie fa gran conto di questa dottrina, ser-

Estrazione delle radici.

71. Le stesse nozioni ci somministrano il canone generale per l' estrazione di qualunque radice. 1.° Si estragga la radice ricercata dal primo membro della grandezza e, se è un numero, si divida prima in membri, ognuno de' quali, cominciando da destra, contenga un numero di cifre eguale all' esponente della radice; nulla importando se il membro ultimo a sinistra ne contenga meno, e da sinistra si cominci il calcolo. 2.° La radice ritrovata si elevi alla potenza, e si sottragga dal primo membro. 3.° Il residuo, trattandosi di numeri, aggiunta ad esso una cifra del membro seguente, si divida per la potenza della stessa radice inferiore

---

vendosene frequentemente. Noi non iscrivendo lezioni d' Aritmetica, ci contentiamo averla di passaggio cennata.

di un grado all'esponente , e moltiplicata per lo stesso esponente. Se poi è grandezza algebrica, dee per un simigliante prodotto dividersi il secondo membro.

```
        11,9.7,1.6      ( 346
         9
        ---
 6      29
        1156
        ----
68       411
        119716
        ------
           0
```

72. Se da questo numero debbo estrarre la radice quadrata, lo divido in tre membri (63. 1:°). Il primo membro non è quadrato, essendosi accoppiato ai prodotti (62. 1.°), troverò la radice del quadrato prossimo minore (*b*) e la scrivo se-

---

(b) Per trovare la radice del primo membro, si forma una tabella; ma trattandosi di ra-

paratamente a destra. 2.° La radice trovata 3 l'inalzo a quadrato, e sottraggo 9 da 11.. 3.° Al residuo 2 aggiungo a destra la prima cifra del seguente membro, e divido 29 per 6 doppio di 3, avrò nel quozientе 4 secondo membro della radice. Così proseguendo, trovo 346, radice quadrata di 115716.

39,0.625 (25
16
32 . 230
390625
c

73 Poco resta a notare per estrarte dal dato numero la radice quarta. Essendo l'esponente della radice 4, ogni membro

---

dice quadrata non è necessaria, perchè facilmente si conoscono i quadrati de' primi nove numeri.

dovrà contenere quattro cifre (72. 1.°) e trovo la radice di 39, che scrivo a destra 2.° Sottroggo 16 dal primo membro; ed al residuo 23 aggiungo la prima cifra del secondo membro. 3.° Formo il cubo di 2, e moltiplicandolo per 4, ho 32, pe'l quale divido 230; il quoziente dà il secondo membro della radice. Così trovo tutti gli altri.

74. Negli addotti esempj si son trovate le radici senza residuo, perchè i numeri sono potenze perfette: quando ci è residuo non sono potenze perfette, ed è impossibile ottenere le radici esatte. Si può trovare la prossima, aggiungendo de' zeri al numero, e seguitando il calcolo: Se si cerca la radice quadrata, si aggiungono pariglie, per la cubica ternarj, e così dell' altre: acciocchè sieno altretanti membri. Terminato il calcolo, si separano tante cifre dalla radice, quanti membri di zeri si sono aggiunti, i quali esprimeranno i decimali, come nella divisione (47). Si può ancora formare un rotto, di cui il residuo è numeratore, e 'l doppio della

radice con uno di più il denominatore.

75. Ma più d' ordinario le radici imperfette si notano sotto questo segno $\sqrt{}$, che dicesi *Radicale*, e la grandezza dicesi *Irrazionale*. Se quel segno non ha niun numero, esprime la radice quadrata: se vuol esprimersi altra radice, si nota di sopra l' esponente di essa... $\sqrt{a}$ segna la radice seconda di a; $\sqrt[3]{a}$ esprime la radice terza. Da ciò si deduce 1.° $\sqrt{a^2}=a=a^{\frac{2}{2}}$, e perciò $\sqrt[3]{ab}=a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}$. O sia 2.° Una grandezza sotto il segno radicale può ridursi ad una potenza con un rotto per esponente, che dicesi ancora potenza rotta: L' esponente della grandezza è numeratore, e quello del segno denominatore. 3.° Ed una potenza rotta può ridursi a radicale, dando al segno radicale per esponente il denominatore, ed alla grandezza il numeratore. Ciò posto sarà $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}$. Dunque 4.° Una grandezza razionale mettesi sotto il segno, con innalzarla alla potenza espressa dall' esponente

del radicale, ed indi moltiplicarla per l' irrazionale... $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$. 5.° Siccome per passare sotto il segno una grandezza, è necessario elevarla alla potenza del radicale, ed indi moltiplicarla per la grandezza irrazionale: così volendo torre una grandezza, od una sua parte dal segno, dee trovarsi tra le parti aliquote di essa la potenza, che abbia l' esponente del radicale, ed estrarne la radice. $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$, $\sqrt{108} = 3\sqrt[3]{4}$. Se poi non può trovarsi la potenza esatta, la grandezza è tutta irrazionale.

LEZIONE VIII.

Delle ragioni geometriche.

76. Essendo la ragione il paragone delle grandezze (4), non può aver luogo, che tra due grandezze, le quali diconsi *termini* della ragione: quello che si paragona dicesi *antecedente*, e quello, cui si paragona, *conseguente*. Inoltre osservandosi nella ragione geometrica quanto una grandezza debba replicarsi, per eguagliare l' altra; si osserva ancora quanto una contiene od è contenuta nell' altra. Sempre si concepisce che l' antecedente contiene il conseguente. Da ciò però non segue che debba l' antecedente esser sempre maggiore del conseguente: poichè se sono eguali, l' antecedente contiene il conseguente una volta sola, e la ragione dicesi d' *egualtà*, se lo contiene più d' una volta, è ragione di *maggiore inegualtà*, e l' antecedente su-

pera il conseguente : vi è finalmente la ragione di *minore inegualtà* , nella quale l' antecedente contiene qualche parte del conseguente, e quello è minore di questo. Due punti separano i termini di una ragione ... $a : b$ ... $4 : 2$. Si legge *a* sta a *b*; 4 sta a 2.

77. Volendo sapere quanto una grandezza contiene l' altra , fa d' uopo dividerla (17). Dunque 1.° si trova l' *Esponente* di una ragione, o sia quella grandezza , che esprime il valore della ragione , dividendo l' antecedente pe'l conseguente. L'esponente di $a : b$ è $\frac{a}{b}$, di $10 : 11$ è $\frac{10}{11}$, di $9 : 3$ è $\frac{9}{3}$ di $4 : 4$ e $\frac{4}{4} = 1$ ec. Dunque 2.° la ragione d'eguaglianza ha per esponente l' unità , di maggiore ineguaglianza un rotto improprio, e di minore inegualtà un rotto vero. Gli antichi hanno distinte tante sorti di ragioni: doppia , tripla , suddupla , suttripla , sesquialtera , sesquiterza ec., secondo la varietà degli esponenti ; ma i più recenti esprimono co' numeri ogni ragione.

78. Ora quantunque tutte le grandezze si possano concepire come numeri (5)

pure alcune grandezze paragonate fra loro non corrispondono a due numeri ; non può trovarsi il loro esponente, e si dicono grandezze *Irrazionali*. (Queste non si confondano con quelle, di cui si è altrove ragionato (75)). Il lato di un quadrato, e la sua diagonale sono di tal natura. Due grandezze per concepirsi come due numeri, fa d' uopo concepirle divise in parti eguali, ed ognuna di esse faccia le veci dell' unità. In due grandezze irrazionali non può trovarsi una parte, che replicata alcune volte pareggi una, ed altre volte replicata pareggi l' altra grandezza ; ma sempre può concepirsi.

79 Ne' numeri non può mai incontrarsi questo scoglio: nella ragione, *es. g.* 10 : 7 si trova l' esponente, perchè tutt' i numeri sono divisibili per l' unità: ma l' unità non è *comune misura*, e perciò molti numeri sono *primi fra loro* (35). Oltre i numeri primi fra loro vi sono i numeri *primi*, cioè quei, che non possono esattamente dividersi, fuorchè per l' unità, o per se stessi. Opposti ai numeri primi sono i

multipli, che sono divisibili esattamente per altri. 10, e 7 sono numeri primi fra loro, perchè fuori dell' unità non può trovarsi un numero, che li divida amendue: ma il solo 10 non è numero primo, perchè divisibile per 2, e per 5, de' quali dicesi multiplo: 7 è numero primo, poichè non trovasi per qual' altro dividersi. I numeri, od altre grandezze minori, per le quali si dividono le maggiori, si dicono *parti aliquote*; e se non possono dividerle, parti *aliquante*. . . 6 è parte aliquanta di 10, e la grandezza maggiore dicesi *non multiplo*, o *multiplo aliquanto*, la comune misura di più grandezze dicesi ancora *aliquota comune*; così si danno i *multipli comuni*. Finalmente se due o più grandezze minori debbano replicarsi egualmente, affinchè pareggino altre maggiori, si chiamano *parti simili*; o *egualmente parti*: e le grandezze maggiori *egualmente multipli*, o *multipli simili*,, Queste voci hanno qualchè barbarie della scuola; ma sono consecrate dall' uso: più impropria è la parola ragione nel senso usato da' Matematici,,

80. Ora conoscendosi le ragioni per mezzo degli esponenti ; ne segue che le ragioni sono come gli esponenti . Dunque 1.° due , o più ragioni sono eguali , o pure una è doppia , tripla , metà o terza parte dell' altra , secondochè l' esponente di una è eguale , doppio , triplo , o pure metà , o terzo dell' altro : ed al contrario se gli esponenti sono eguali , o diseguali in qualunque modo , anche eguali , o diseguali allo stesso modo sono le ragioni . Di più calcolando gli esponenti , si calcolano le ragioni .

81. Trovandosi l' esponente di una ragione, con dividere l' antecedente pe 'l conseguente (69. 1.°) ; sarà 1.° L' esponente il quoto dell' antecedente pe 'l conseguente . Nella divisione il dividendo contiene il divisore , quante volte il quoziente contiene l' unità , come può facilmente dedursi . Dunque 2.° nelle ragioni l' antecedente sta al conseguente , come l' esponente all' unità . Il confronto dell' esponente all' unità riduce la ragione a minimi termini 3.° Dividendo l' antecedente per l' esponente

il quoto darà il secondo termine: e moltiplicando il secondo termine per l'esponente, si trova il primo. Ora il primo termine è ordinariamente noto, gli altri si trovano; e per evitare la divisione, si pratica la moltiplicazione, concependo il quoziente inverso al vero, cioè se è 2 si concepisce $\frac{1}{2}$, e 'l calcolo riesce lo stesso. Sia 8 il primo termine, e l'esponente 4, il secondo termine sarà $\frac{8}{4} = 8 \times \frac{1}{4}$. E generalmente sia a il primo termine, e l'esponente q; il secondo termine sarà qa.

82. Una grandezza dicesi in *ragione diretta* di un'altra, quando cresce, o manca, secondochè l'altra cresce o manca. Dicesi poi in *ragione inversa*, o *reciproca*, se quanto una cresce, ammanca l'altra. Ora s'intende ciocchè si è dimostrato (33. 2° 3.°). I rotti, che hanno lo stesso denominatore, sono in ragione de' numeratori: e se hanno lo stesso numeratore, sono in ragione inversa de' denominatori, E trasformando le ragioni in rotti, si deduce 1.° Le ragioni, che hanno stesso conseguente, sono come

gli antecedenti ; e se hanno lo stesso antecedente, sono in ragione inversa de' conseguenti . 2.° Una grandezza inversa di un' altra esprimesi con un rotto , che ha per numeratore l' unità , e la grandezza , di cui è inversa, per denominatore: Se l' antecedente di una ragione è doppio del suo conseguente ; l' antecedente dell' inversa è metà del conseguente . Dunque 3.° due ragioni inverse hanno l' esponente inverso.

83. Se poi una grandezza cresce , o manca secondochè crescono , mancano più grandezze , dicesi in *ragione composta* di quelle. E finalmente una grandezza è in ragione composta dalla diretta di una, e dall' inversa dell' altra, se cresce o manca, come cresce, o manca una , e cresce , se manca l' altra, o manca , se l' altra cresce. Di tal natura sono i rotti: in ragione composta dalla diretta de' numeratori , e dall inversa de' denominatori (a).

(a) In fisica si trovano molte di tali grandezze. Si camina più lungo spazio, quanto più

84 Dal detto facilmente rilevasi 1.° se una grandezza è in ragione composta di altre, è in ragione de' loro prodotti. Dunque 2.° una ragione composta di più ragioni ha per esponente il prodotto degli esponenti delle ragioni semplici. Dunque 2.° i prodotti sono in ragione composta de' due fattori. Dunque 3.° la ragione composta da due una inversa dell' altra è ragione di egualtà. Di più se due ragioni sono eguali, hanno lo stesso esponente (81). Dunque 3.° La ragione composta di due ragioni eguali ha per esponente il quadrato dell'esponente di ciascuna di esse. Perciò dicesi ragion *quadrata* o *duplicata*: se le ragioni semplici eguali son tre, dicesi *triplicata*, o *cubica*; se son quattro *quadruplicata* ec. E quì si badi a non confonderle colla ragione dupla

---

tempo si impiega, e quanto il moto è più veloce. Deve impiegarsi più tempo, quanto è maggiore lo spazio, e quanto il moto e meno veloce.

o tripla. Siccome la ragione duplicata, o triplicata ha per esponente il quadrato, o il cubo dell' esponente di ciascuna delle semplici: così la sudduplicata, o suttriplicata ha per esponente la radice seconda o terza. Si danno ancora le grandezze in ragione duplicata e sudduplicata di altre grandezze.

85. Se gli esponenti di più ragioni sono eguali: le ragioni sono eguali (81). Dunque 1.° le duplicate, triplicate ec. di ragioni eguali sono eguali. E concependosi gli esponenti come due grandezze assolute, si deduce: 2.° Se le grandezze sono eguali, i quadrati, e tutte le potenze dello stesso esponente sono eguali 3.°. Vice-versa sono eguali le sudduplicate, e suttiplicate di ragioni eguali: e sono eguali le radici di grandezze eguali. 4.° Onde in una equazione non si altera l' egualtà, se dall' uno, e dall' altro membro si estrae la stessa radice, o se amendue s' elevano alla stessa potenza, come si è avvertito (63).

86. Ora le grandezze che sono eguali ad una stessa, sono eguali fra loro (51);

Dunque 1.° gli esponenti, e perciò le ragioni eguali ad una stessa, sono eguali fra loro. E se una ragione è eguale a molte: son queste ragioni tutte eguali fra loro. 2.° Se una è maggiore, o minore di una dell' eguali, è maggiore o minore di tutte l' altre. E 3.° se più grandezze sono eguali, han tutte egual ragione ad una stessa grandezza: le grandezze che hanno egual ragione ad una; sono eguali: e una grandezza ha egual ragione a tutte le grandezze eguali.

87. Paragonando poi le grandezze diseguali, si deducono agevolmente quest' altri teoremi. 1.° Le grandezze diseguali hanno disegual ragione ad una stessa: La grandezza maggiore ha maggior ragione: e la minore minor ragione ad una stessa, poichè paragonando una grandezza maggiore, l'esponente è maggiore (33. 2.°). 2.° Per lo contrario una grandezza ha disegual ragione a più grandezze diseguali: è maggiore quella che ha alla grandezza minore; minore quella che ha alla grandezza maggiore. Gli esponenti sono allora rotti

dello stesso antecedente ; e perciò in ragione inversa de' conseguenti (Ivi 3.°). 3.° Se una grandezza ha disegual ragione a più grandezze ; sono queste diseguali : è maggiore quella , cui la stessa grandezza ha minor ragione : minore quella , cui ha maggior ragione . 4.° E le ragioni diseguali sono tanto differenti , quanto sono differenti le grandezze diseguali (a) 5.° E parimenti sono tanto differenti le grandezze diseguali ; quanto lo sono le ragioni ,, Non si sono recate le dimostrazioni ; perchè sarebbero state tutte monotone , e uniformi ripetizioni de' medesimi calcoli degli esponenti .

(a) Quì s' intenda la disuguaglianza per la maniera di contenersi , non per l' avvanzo .

LEZIONE IX.

Calcolo delle ragioni.

88. DAl detto può rilevarsi che le ragioni possono calcolarsi come le grandezze (81). Dunque possono sommarsi, sottrarsi, moltiplicarsi, e dividersi.

89. Siccome la somma di più grandezze pareggia tutte le grandezze insieme prese (9): così 1.° La ragione che si ottiene, sommando più ragioni, deve avere un esponente eguale alla somma degli esponenti delle ragioni date. 2.° Dunque sommando gli esponenti, si sommano le ragioni.

Sieno ... $a : b$ ... $c : d$ ... $r : s$ da sommarsi. I loro esponenti sono $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{r}{s}$: i quali si sommano, riducendosi allo stesso denominatore (36) ... $\frac{ads}{bds}, \frac{bcs}{bds}, \frac{bdr}{bds}$. La loro somma sarà $\frac{ads + bcs + bdr}{bds}$; e la ragione eguale alla lor somma ... $ads + bcs + bdr : bds$. Sieno ... $4 : 3 . 7 : 5, 11 : 9$. Gli esponenti sono ... $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{11}{9}$ che corrispondono ... $\frac{180}{135}, \frac{189}{135}, \frac{165}{135}$ insieme presi eguali a ... $\frac{534}{135}$. Onde la somma di tali ragioni è ... $534 : 135$.

90. Quindi si deduce 1.° Le ragioni si riducono allo stesso conseguente collo stesso metodo, col quale i rotti si riducono allo stesso denominatore: il prodotto de' conseguenti è il conseguente comune. 2.° E

siccome si scorge a primo colpo d' occhio il valore di più rotti, che hanno lo stesso denominatore; così rilevasi la quantità di più ragioni, riducendole allo stesso conseguente.

91. Volendosi far uso dell' esposte dottrine, può facilmente sottrarsi una ragione da un' altra ... $a : b$ voglia sottrarsi dalla ragione di ... $c : d$; la differenza sarà $ad - bc : bd$ ... 3 : 6, 12 : 8; differenza 552 : 48. A buon conto si riducono le ragioni allo stesso conseguente, e si sommano, o sottraggono gli antecedenti. Ed ... $ad \pm bc : bd$ è l' espressione generale per la somma, o differenza di due ragioni (*a*).

(a) Dalla formola proposta posso ricavarne quest' altra: dividendo per b avrò 1. $\frac{ad}{b} \pm c : d$ Dividendo per d, avrò 2° $a \pm \frac{bc}{d} : b$. E dividendo per bd, sarà $\frac{ad \pm bc}{bd} : 1$.

92. Quasi mai occorre sommare, o sottrarre le ragioni: è frequentissima nella pratica, e nelle teorie di tutta la matematica la moltiplicazione. Questa si esegue allo stesso modo, moltiplicando gli esponenti, che non han bisogno di esser ridotti allo stesso denominatore, come si è avvertito pe' rotti (33). Ma lo stesso calcolo si adopera per le ragioni composte (84. 2). Dunque ragione moltiplicata, e ragione composta vaglion lo stesso: e potrà qui ripetersi tutto ciò, che si è esposto di sopra (*Ivi*). Convengono ancora a questo luogo, tutte le teorie, che si sono esposte, e quelle che in seguito dimostreremo intorno ai prodotti.

93. E riflettendo che gli esponenti delle ragioni sono i loro termini trasformati in rotti, si conchiude 1.° I prodotti de' termini omologi di più ragioni sono in ragione composta di tutte quelle ragioni... $a : b \ldots c : d \ldots d : e$, sarà $acd : bde$ la ra-

gione composta (a). Ora tutte le grandezze in qualunque maniera proposte possono disporsi in tante ragioni. Dunque 2.° il prodotto di tutte le grandezze, qualunque sia il loro numero, ad eccezione dell' ultima, sta al prodotto delle stesse grandezze, ad eccezione della prima, in ragione composta di tutte le ragioni di quelle grandezze. Sieno . . . a, b, c, d, e ec: possiam formarne tante ragioni . . . $a:b$ . . . $b:c$ . . . $c:d$ . . . $d:e$. Moltiplicando tutti gli antecedenti, avremo . . . $abcd$, e moltiplicando i conseguenti, $bcde$. La loro ragione è composta da tutte quelle ragioni. Onde 3.° se sono quante grandezze si voglia: la ragione della prima all' ultima è composta dalle ragioni di tutte le grandezze intermedie.

Sieno: la composta sarà

1.° $7:3 \ldots 20:15$ $\quad 7 \times 20 : 3 \times 15$

(a) Proposte due ragioni $a:b \ldots c:d$, la formola de' loro prodotti sarà . . . $ac:bd$. La quale mi dà quest'altre 1.° $\frac{ac}{b}:d$. 2.° $a:\frac{bd}{c}$ 3.° $\frac{ac}{bd}:1$.

2.° 3, 5, 9, 12 135 : 540
3.° 2, 4, 8, 16 64 : 512 = 2 : 16 (a).

94 Volendo finalmente dividere una per un' altra ragione, fa d' uopo dividere gli esponenti. E poichè i rotti si dividono, moltiplicando il dividendo pe 'l divisore inverso (39): il prodotto degli estremi, e de'

(a) Questo esempio può intendersi senza veruna difficoltà per una vera dimostrazione, e Gregorio da S. Vincenzo, non volendo uniformarsi a Teone, Eutocio, e Vitellione, che usarano quel teorema impropriamente per assioma, si contentò dimostrarlo in numeri, rimettendo ai geometri posteriori la dimostrazione in grandezze indeterminate. Tacquet si studiò molto a trovarla, e la propone nella terza parte del suo libro quinto in Euclide. Ma se quella dimostrazione non manca in altro, ha senza dubio molta difficoltà pei principianti.

medj darà la ragione divisa ... $\frac{a : c}{b : d}$, sarà

$ad : bc$ (a).

8 : 3, 5 : 4 .... 32 : 15.

95 Dunque dividere due ragioni eguali è lo stesso, che moltiplicare una ragione per la sua inversa (83. 3.°) il quoziente sarà 1, e la ragione è ragione d' eguaglianza (84. 3.°). Dunque se il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medj, le ragioni sono eguali, ed all' opposto. Se $a : b = c : d$; sarà ... $ad = bc$.

8 : 2 = 12 : 3 .... 8×3 = 12×2.

(a) Usando lo stesso metodo (92) trovo 1.° $\frac{ad}{bc}$: 1.... 2.° $\frac{ad}{b}$: c. 3.° $\frac{ad}{c}$: b.

LEZIONE X.

Delle Proporzioni geometriche.

96 LA *proporzione* od *analogia* consiste nell' eguaglianza delle ragioni. Dunque 1.° L' eguaglianza del prodotto degli estremi, e di quello de' medj è il carattere fondamentale delle proporzioni. Per formare una proporzione sono necessarie due ragioni, e per conseguenza quattro termini: ma perchè un termine può esser conseguente nella prima ragione, ed antecedente nella seconda; possono bastare tre grandezze. Ora la proporzione di quattro termini dicesi *discreta*, e quella di tre termini *continua*. E poichè nella proporzione continua un termine si paragona due volte: sarà 2.° il prodotto degli estremi eguale al quadrato del medio. Si scrive così la discreta ... $a : b = c : d$, e si legge a sta a b, come c a d, e la continua ∺ $a : b : c$

1.° $12 : 9 = 8 : 6 \ldots \quad 12 \times 6 = 9 \times 8$.

2.° $\div 12 : 6 : 3 \quad 12 \times 3 = 6 \times 6$.

97. Dunque 1.° dividendo pe 'l primo termine il prodotto del secondo pe 'l terzo: il quoziente darà il quarto termine della ragione discreta $a : b = c : x \ldots x = \frac{bc}{a}$. E.

$a : b = x : d \ldots x = \frac{ad}{b}$ 2.° Il prodotto degli estremi diviso pe 'l secondo dà il terzo. Dippiù $\div a : b : x \ldots x = \frac{b^2}{a}$ 3.° Dividendo pe 'l primo il quadrato del secondo: si trova il terzo termine della ragione continua. 4.° Estraendo la radice quadrata dal prodotto del primo pe 'l terzo: si ha il medio $\div a : x : b \ldots x = \sqrt{ab}$, che è la quarta formola per ogni analogia.

1.° $12 : 9 = 8 : x \ldots x = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6$

2.° $12 : 9 = x : 6 \ldots x = \frac{12 \cdot 6}{9} = 3$

$3.^{\circ} \div 12 : 6 : x \ldots x = \frac{6 . 6}{12} = 3$

$4.^{\circ} \div 12 : x : 3 \therefore x = \sqrt{12 . 3} = 6$

98. Sia $a : b = c : d$, sarà $ad = bc$ (95). Dunque 1.° ogni proporzione può ridursi ad una equazione; ed ogni equazione può risolversi in una proporzione. 2°. E perciò se due prodotti sono eguali, i loro fattori sono proporzionali. Ciascun membro dell' equazione contiene i fattori dell' uno, e dell' altro prodotto: Onde 3.° i fattori di ciascun prodotto sono fra loro in ragion reciproca; quanto il moltiplicando del primo prodotto contiene, od è contenuto nel moltiplicando del secondo prodotto, tanto il moltiplicatore del primo prodotto è contenuto o contiene il moltiplicatore dell' altro.

$18 . 2 = 9 . 4 \therefore 18 : 9 = 4 : 2$

99. L' equazione $ad = bc$ può risolversi nelle seguenti proporzioni

I. $a : b = c : d$	III. $b : a = d : c$	V. $c : a = d : b$
II. $a : c = b : d$	IV. $b : d = a : c$	VI. $c : d = a : b$

VII. $d:b=c:a$
VIII. $d:c=b:a$. Confrontando ciascuna colla prima, si scorge esser la seconda il paragone de' due antecedenti, e de' due conseguenti. Questa dicesi *ragione permutata*. La terza, è il paragone de' conseguenti agli antecedenti: e dicesi *inversione di ragione*. Tutte l'altre si riducono a queste.

I. $12:9=8:6$	III. $9:12=6:8$
II. $12:8=9:6$	IV. $9:6=12:8$
V. $8:12=6:9$	VII $6:8=9:12$
VI. $8:6=12:9$	VIII. $6:9=8:12$

100. Sia . . . $a:b=c:d$, e . . . $a:x=c:y$; permutando la prima sarà $a:c=b:d$, e la seconda . . . . $a:c=x:y$ (99. 1.°); Dunque $b:d=x:y$ (86.1.°); vale a dire se due grandezze sono proporzionali agli antecedenti, lo sono ancora ai conseguenti, di una proporzione. Si dimostrano, collo stesso raziocinio proporzionali agli antecedenti, se lo sono ai conseguenti. Onde, se due grandezze sono proporzionali a due omologhe di una proporzione, sono proporzionali all' altre omologhe.

Sia . . . $12:9=8:6$, e . . . $12:15=8:10$, sarà . . . $9:15=6:10$.

101. Se l'esponente delle ragioni proposte è q; la proposizione si trasforma in questa . . . $a:qa=c:qc$ (82. 3.°). Ora se q è intero, qa, qc esprimono i multipli di a, e di c: se è rotto, esprimono quelle le parti simili di queste grandezze. Dunque 1.° se quattro grandezze sono proporzionali: le omologhe sono multiple, o parti simili dell'altre due. 2.° Perciò se la prima è eguale maggiore, o minore della terza; sarà la seconda eguale, maggiore, o minore della quarta. 3.° Se la prima è eguale maggiore, o minore della seconda; anche la terza è eguale, maggiore, o minore della quarta. Ora permutando sarà . . $a:c=qa:qc$; cioè 4.° Gli egualmente multipli in ragione delle parti simili; e viceversa.

102. Sia $a>b$, sarà $c>d$ (111. 3.°); sia inoltre $a>c$, sarà $b>d$: onde d la minima. Dunque se di quattro grandezze proporzionali la prima è massima, la quarta è minima.

103. Supposta a la massima, sia $a=b+m$, $c=d+n$ (101. 3.°) sarà $m>n$. Dunque... $b+d+m>b+d+n$: onde scrivendo a in vece di $b+m$, e c per $d+n$, sarà $a+d>b+c$. La somma della massima, e minima maggiore della somma delle grandezze medie.

Sia ... $12 : 8=9 : 6$ ... $12+6>9+8$

104. Di nuovo ... $a : b=c : d$ ... a contiene tanto di b, quanto c di d : ora b contiene una volta b, e c contiene una volta se stessa. Dunque $a+b$; e $c+d$ contengono b, d quanto prima, ed una volta dippiù : Onde sarà .... $a+b : b=c+d : d$. Dunque 1.° le somme degli antecedenti, e conseguenti sono proporzionali ai conseguenti: e vice versa. Con simil ragionamento si deduce 2° Le somme sono proporzionali agli antecedenti. Questo paragone dicesi *composizione di ragione*.

Sia ... $12 : 8=9 : 6$ ... sarà

1.° $12+8 : 8=9+6 : 6$ ∴ $12+8 : 9+6=8 : 6$

2.° $12+8 : 12=9+6 : 9$ ∴ $12+8 : 9+6=12 : 9$

105. Da ciò si deduce 1°. Le somme de' multipli sono proporzionali alle parti

simili, e viceversa. 2.° Le somme de' multipli sono multiple delle grandezze. 3° I multipli de' multipli sono multipli delle grandezze. 4.° Viceversa le parti simili delle grandezze sono parti simili de' loro multipli.

Analizzando l' esempio superiore, ed altri simili, possono confermarsi colla stessa evidenza queste dottrine.

106. Se a contiene b, quanto c contiene d, $a-b$ conterrà di b, quanto $c-d$ contiene di d, o che val lo stesso, sarà .. $a-b : b=c-d : d$, cioè le differenze proporzionali ai conseguenti. Questa combinazion di termini dicesi *divisione di ragione*.

Sia ... $12 : 8=9 : 6$ .... $12-8 : 8=9-6 : 6$

107. Dunque se due grandezze maggiori sono proporzionali a due grandezze minori: le differenze sono proporzionali alle grandezze maggiori, ed alle minori; e viceversa.

108. Se .. $a : b=c : d$, sarà .. $a-b : b=c-d : d$ (106), e ... $b : a-b=d : c-d$ (99 2°, e $b+a-b : a-b=d+c-d : c-d$ (104), o sia $a : a-b=c : c-d$, cioè gli antecedenti proporzionali alle differenze. E coll' *inversio-*

ne si trovano le differenze proporzionali agli antecedenti . . . $a-b : a = c-d : c$. Quest' altre combinazioni di termini si dicono *Conversione* di ragione.

$12 : 8 = 9 : 6$ . . . $12 : 12-8 = 9 : 9-6$.

„ Queste composizioni, e divisioni non debbono confondersi con quelle, di cui si è altrove ragionato (93, e 94). Quelle consistono nel calcolo degli esponenti, e queste nell' addizione, e sottrazione de' termini.

109. Onde supposto . . . $a : b = c : d$, si hanno le seguenti analogie

$a \pm b : b = c \pm d : d$ . . . $a : a \pm b = c : c \pm d$ . . .

$a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$. Le quali paragonate colle superiori (99) danno dell' altre. Quelle si son dedotte dalla risoluzione dell' equazione, e queste possono confermarsi, riducendole ad equazione.

110. Ora essendo ma, mb egualmente multipli di a di b, sarà . . . $ma : mb = a : b$ (101.4.°) Dunque 1.° se due grandezze si moltiplicano per una, o per eguali: i prodotti sono fra loro, ed a quelle proporzionali 2.° I prodotti che hanno due fa-

tori eguali; sono come gli altri due.

$3 \times 2 : 5 \times 2 = 3 : 5$

111. Viceversa sarà ... $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$: ossia i quozienti di più grandezze divise per una, o per eguali sono come le grandezze.

112. E per trovare de' prodotti, o de' quozienti le differenze, basterà attentamente analizzarli. Se ... $a > b$, sarà $ma > mb$. $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ (101.4°). Ora ... $ma - mb = (a - b) . m$ $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = (a - b) : m$. Dunque le differenze de' prodotti, o de' quozienti pareggiano le differenze, delle grandezze moltiplicate, o divise per la stesse, o per eguali.

$6 \times 2 - 3 \times 2 = (5 - 2) \times 2 \ldots \frac{8}{2} - \frac{6}{2} = \frac{8 - 6}{2}$.

112. E supposta ... $a > b$, sia inoltre ... $m > n$; sarà .. $ma - mb = (a - b) . m$ $mb = nb (m - n)$. b (112) Dunque .. $ma - nb = (a - b) . m + (m - n) . b$. Dunque 1.° le differenze de' prodotti sono eguali alle differenze de' fattori reciproca-

mente moltiplicate. Cioè la differenza delle moltiplicande per la maggiore delle moltiplicanti, e la differenza delle moltiplicanti per la minore delle moltiplicande. 2.° La differenza de' quadrati pareggia la differenza delle radici moltiplicata per le stesse radici

1. Si faccia $a=15$. $b=12$. $m=6$. $n=4$,

$25\times6=150 \quad 12\times4=48 \quad 150-48=$
$102=(25-12)\times6+(6-4)\times12=78+24$.

2.° $49-25=(7-5)\times7+(7-5)\times5$.

113. Egualmente . . $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}=\frac{na-ma}{mn}$ 1.

La differenza de' quozienti eguale alla differenza de' prodotti delle grandezze reciprocamente moltiplicate, divisa pe 'l prodotto de' divisori. 2.° E la differenza delle radici pareggia la differenza de' prodotti, uno del quadrato maggiore per la radice minore, e l'altra del quadrato minore moltiplicato per la radice maggiore divisa pe 'l prodotto delle radici. Analizzando l'altre potenze, e le radici corrispondenti, posson trovarsi le rispettive dif-

ferenze. Sia finalmente . . . $\frac{a}{m}=q$ . . $\frac{a}{n}=r$.
sarà $\frac{q}{n}=\frac{a}{mn}=\frac{q\pm r}{n\pm n}$. Dunque 3.° se una grandezza si divide per due, e'l primo quoziente si divide pe'l secondo divisore, si avrà una grandezza eguale alla somma, o alla differenza de' due primi quozienti divisa per la somma, o per la differenza de' divisori.

Sia $a=60$ . . . $b=40$ . . . $m=10$ . . . $n=8$

sarà 1.° $\frac{60}{10}-\frac{40}{8}=\frac{60.8-40.10}{10.8}=1$.

2° $\sqrt{64}-\sqrt{36}=\frac{64.6-36.8}{8.6}=2$.

Sia ora $a=360$. $m=12$, , . $n=10$.

Sarà 3.° $\frac{\frac{360}{12}}{10}=\frac{30\pm 36}{10\pm 12}$.

114. Se . . . $a:b=c:d$; sarà $ma:b=mc:d$ (101.4°); $ma:mb=a:b$ (110.1.°), e perciò $ma:mb=c:d$ (86.1.°) . . $a:mb=c:md$ (101.4°) E finalmente . . . $ma:mb=mc:md$. per la

stessa ragione... $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$ ... $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$

$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$ ... $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$. Vale a dire moltiplicando, o dividendo i termini di una sola ragione, o gli omologhi, o quelli di amendue le ragioni, restano sempre proporzionali. Ogni proporzione in numeri può confermarlo.

114. E chiaro egualmente, che se $a : b = c : d$, e $m : n = x : y$; ancora ... $ma : nb = xc : yd$; e... $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{x} : \frac{d}{y}$. Se i termini di una proporzione si moltiplicano, o si dividono pe' i termini analoghi di un' altra; i prodotti, o i quozienti sono proporzionali.

115. Sia ora ... $a : b = c : d = e : f$ ec.; sarà $a : c = b : d$ (99); $a + c : c = b + d : d$ (104); onde $a + c : b + d = c : d$; e così $a + c + e : b + d + f = e : f$. Se più ragioni sono eguali; le somme degli antecedenti, e conseguenti sono proporzionali ad uno antecedente, e conseguente.

$$\begin{array}{rcl} 15 & : & 10 \\ 12 & : & 8 \\ 9 & : & 6 \\ \hline 36 & : & 24 \end{array} = 15 : 10 = 12 : 8 = 9 : 6 .$$

116. Non solamente le somme sono proporzionali; ma ancora le grandezze egualmente lontane, quando le grandezze formano due file ordinate. Così se ... $a : b = m : n$ $b : c = n : o$ .. $c : d = o : p$ ec.; sarà .. $a : c = m : o$. Infatti essendo ... $a : b = m : n$, sarà $a : m = b : n$ (99. 1°); e ... $b : n = c : o$. Dunque ... $a : m = c : o$ (85. 1.°); $a : c = m : o$.

Può osservarsi l'esempio superiore.

117. Se poi sono in *ragione perturbata*, cioè la prima di una fila alla seconda grandezza, come la prima dell'altra fila alla seconda grandezza, e la seconda della prima fila alla terza della stessa fila, come la terza dell'altra fila alla prima grandezza: sarà la prima della prima fila alla terza grandezza, come la terza della seconda fila alla seconda grandezza. Sia ... $a : b = m : n$, e ... $b : c = o : m$. Per la prima sarà ... $an = bm$, e per la seconda $bm = co$ (95). Dunque ... $an = co$ (51. 1.°),

LEZIONE XI.

Delle progressioni geometriche.

118 SE una proporzione geometrica ha più di tre termini, degenera in progressione: così ∺ $a : b : c : d : e$. Se l' esponente di queste ragioni è intero, i termini van sempre crescendo, e la progressioni dicesi *crescente*: se è un rotto, i termine van diminuendosi, e la progressione si appella *decrescente*.

119 Sia a primo termine, e q esponente di una progressione ... $a q$ sarà il secondo (82. 3.°), $\frac{a^2 q^2}{a} = a q^2$ il terzo (97. 2°) $\frac{a^2 q^3}{a} = a q^3$ il quarto termine (82. 1°) ed ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ ec. è la formola generale per qualunque progressione geometrica. Dunque 1.° in ogni progressione geometrica la ragione del primo

termine al terzo è duplicata della ragione del primo al secondo; la ragione del primo al quarto è triplicata: e così pegli altri termini. E supponendo $a=q$, sarà ... $aq=a^2$, e la progressione si trasforma in questa $\div\!\div$ $a : a^2 : a^3 : a^4$ ec. nella quale si osserva 2.° Se in una progressione l' esponente pareggia il primo termine, tutt' i termini sono potenze del primo. Dunque 3.° Ogni potenza è ultimo termine di una progressione, nella quale la radice è il primo.

120 Analizzando le proposte formole, osserviamo 1.° Ogni termine paraggia il precedente moltiplicato per l' esponente elevato alla potenza espressa dal numero de' termini, che precedono. Dunque 2.° se n esprime il numero de' termini, a il primo termine, e q l' esponente: aq^{n-1} è la formola dell' ultimo termine, cioè $u = a^{n-1}$,

Onde 3.° $\sqrt[n-1]{a} = q$. Formola dell' esponente.
Si supponga $a = 2$, $q = 2$, $n = 5$, sarà. $aq^{n-1} = 2 \cdot 2^4 = 32$.

121 Inoltre possiam ricavare il metodo d'inserire due mezzi proporzionali x, y tra a, b. Questi dati col maneggio delle formole mi danno questa progressione $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots aq = x$, $aq^2 = y$, $aq^3 = b$. Ma $aq = \sqrt[3]{(a^3 q^3)} = \sqrt[3]{(a^2 . b)} \ldots aq^2 = \sqrt[3]{a^3 q^6} = \sqrt[3]{a\, b^2}$, cioè il primo mezzo proporzionale si trova, estraendo la radice cubica dal prodotto del quadrato del primo termine moltiplicato pe'l quarto ; e'l secondo medio, estraendo la radice terza dal prodotto del primo termine moltiplicato pe 'l quadrato del quarto

$$\div\div 4 : x : y : 32 \ldots x = \sqrt[3]{(4 . 4) . 32)} = 8$$
$$y = \sqrt[3]{(32 . 32) 4)} = 16.$$

122. Trovando tra x, y il mezzo proporzionale, si hanno tre mezzi : potrebbero inserirsi anche gli altri tra a, x, tra y, b; e così all' infinito. Ma posso, analizzando la formola co' dati, trovare la formola per inserire un numero n di termini tra a, b. I termini della progressione

sono n; il primo a, e l' ultimo b; val quanto dire $n+2$. Dunque l' esponente sarà .. $\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ (118. 3.°) e perciò il primo termine da inserire .. $a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$, il secondo .. $(a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}) = \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b}{a}}$. Così s' inserisce un numero qualunque di termini.

123. Siccome inserendo de' termini in una proporzione, si ha la progressione (122); così una progressione può concepirsi come una proporzione. Dunque 1.° i prodotti degli estremi, e di tutti gli equidistanti sono eguali, e se il numero de' termini è dispari, pareggiano il quadrato del medio (96. 2.°). Onde 2° la somma di tali prodotti pareggia uno di essi prodotti moltiplicato per la metà del numero de' termini. Onde chiamando u l'ultimo termine, p il prodotto, e p' la somma de' prodotti, si han le formole .. $p' = \frac{anu}{2}$

$a = \frac{2p^1}{un} \ldots u = \frac{2p^1}{na} \ldots n = \frac{2p^1}{au}$.

$S_a \div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$

1.° $p = \frac{8}{128} \; \frac{4}{128} \; \frac{2}{128} \; \frac{1}{128}$

2.° $p^1 = 128 \cdot \frac{8}{2} = 512$

3.° $a = \frac{512}{128} \cdot \frac{2}{4} = 1$

4.° $u = (\frac{512}{8 \cdot 1})2 = 128$

5.° $n = \frac{512}{128} \cdot \frac{2}{1} = 8$

I termini della progressione sono di numero pari, poichè se sono dispari, dalla somma de' prodotti dee sottrarsi la metà di un prodotto.

124. Innoltre tutt' i termini fuorchè l' ultimo sono antecedenti; tutti, fuorchè il primo, sono conseguenti: val quanto dire . . $s-u$ esprime la somma degli antecedenti, $s-a$ la somma de' conseguenti. $s-u : s-a = a : aq$ (115). Dunque $aqs - auq = sa - a^2$, o sia $qs - s = uq - a$. Dunque

1.° $s = \frac{uq-a}{q-1}$ formola per la somma de'

termini: onde $s=\frac{aq^n - a}{q-1}$. 2.° $q=\frac{s-a}{s-u}$ formola dell' esponente. 3.° $a=s+(u-s).q$; valore del primo termine. 4.° $u=s-\frac{s-a}{q}$ valore del ultimo termine (a).

Per la progressione proposta sarà

1.° $s=\frac{(128.2)-1}{2-1}=\frac{255}{1}=255$

2.° $q=\frac{255-1}{255-128}=\frac{254}{127}=2$

3.° $a=255+256-510=1$

4.° $u=255-\frac{255-1}{2}=255-127=128$

Dal § 120 si trova $a=\frac{u}{q^{n-1}}$. Onde conferendo queste con quelle formole e coll' altre ritrovate di sopra (124) si hanno nuove formole per tutti i termini.

(a) Con queste formole non può aversi il valore di n senza logaritmi.

LEZIONE XII.

Delle ragioni Aritmetiche.

125 LA differenza tra 'l primo, e secondo termine costituisce la ragione aritmetica. Se dunque al primo termine si aggiunge, o si sottrae da quello la differenza, si ha il secondo, e se al primo termine si aggiunge o sottrae il secondo, trovasi la differenza . . . $a : a \pm d$ esprime la ragione aritmetica. Considerando nella ragione aritmetica la differenza in tutti gli aspetti, che nella geometrica si considera l'esponente, si possono agevolmente dedurre tutte le teorie dimostrate nelle precedenti lezioni.

126 Le ragioni aritmetiche sono ancora discrete, o continue ., $a : a \pm d = c : c \pm d$ può rappresentare qualunque proporzione discreta, nella quale si osserva . . . $a + c \pm d = a \pm d + c$; la somma degli estremi eguale alla somma de' medj.

127 $\div a : a \pm d : a \pm 2d$ è la formola per qualunque ragione continua : supponendo replicato il termine medio, si trasforma in discreta : onde sarà ... $a + a \pm d = (a \pm d).2$. La somma degli estremi eguale al doppio del medio.

128. Dunque 1.° dati tre termini della *ragione discreta*, si trova il quarto, sottraendo il primo dalla somma del secondo e terzo (125) $a : b = c : x = \frac{b+c}{a}$ 2.° Il terzo sottraendo il secondo dalla somma del primo, e quarto ... $a : b = x : c$ ... $x = a + c - b$. 3.° Si ha il terzo nella continua, sottraendo il primo dal doppio del secondo $\div a : b : x$. $x = 2b - a$. 4.° Il medio si ha, prendendo la metà della somma degli estremi ... $x = \frac{a+b}{2}$.

Sia 1.° $7 : 12 = 10 : x \quad x = 12 + 10 - 7 = 13$

2.° $7 : 12 = x : 15 \quad x = 7 + 15 - 12 = 10$

3.° $7 : 12 : x \quad x = 12 . 2 = 24 - 7 = 17$

4.° $7 : x : 15 \quad x = \frac{7+15}{2} = 11$

Progressioni Aritmetiche.

126 SUpponendo a il primo termine, d la differenza ......: $\div$ $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d : a \pm 4d$ ec. è la formola di ogni progressione ; il segno + serve alla crescente , e — alla decrescente . Analizzandola osserviamo 1.° Ogni termine supera, o manca dal precedente nella differenza. Onde 2.° crescendosi il coefficiente della differenza per ogni termine , il numero de' termini supera detto coefficiente in 1 . 3.° I coefficienti della differenza sono nella serie naturale, cominciando da 1 nel secondo termine. E perciò 4.° la differenza tra 'l primo , ed ultimo termine pareggia la somma di tutte le differenze . Essendo la somma degli estremi eguale a quella de' medj (125) od al doppio del medio , se il numero de' termini è dispari (126); 5.° le somme degli equidistanti son tutt' eguali . E perciò 6.° la somma di tutt' i termini pareggia la somma degli estremi

moltiplicata per la metà del numero di termini 7.° L' ultimo pareggia la somma del primo , e della differenza moltiplicata pe'l numero de' termini meno 1 . 8.° La differenza pareggia la differenza tra il primo , ed ultimo termine. divisa pe 'l numero de' termini meno 1 .

130 Dalle quali verità si ricavano le formole , chiamando a il primo termine , u l' ultimo , d la differenza , s la somma , ed n il numero de' termini . 1.° ... $u = a \pm (n-1).d$ .. 2.° $a = u \mp d.(n-1)$ .. 3.° .. $n = \frac{u-a+d}{d}$ ..4.° $d = \frac{u-a}{n-1}$ ..5.° .. $s = (a+u)\frac{n}{2} = \left(\frac{a+p}{2}\right).n$ Ora sostituendo in quest' ultima formola i valori delle precedenti si potrebbero trovare altre venti formole come nella progressione geometrica .

131. Tra a, b voglio inserire il numero n di termini . Tutt' i termini di tale progressione sono n, ed a, e b, cioè $n+2$. Dunque il coefficiente della differenza $n+1$

(127): onde la differenza sarà $\frac{b-a}{n+1}$ (128.4.°) e la progressione ... $a : a \pm \frac{b-a}{n+1} : a \pm \left(\frac{b-a}{n+1}\right) . 2$. ec. b. Se continuando ad inserire de' termini tra gli estremi proposti, il numero, pe 'l quale si moltiplica la differenza, si rende eguale al denominatore di essa, svanisce il rotto, e 'l medio trovato sarà l' ultimo.

LEZIONE XII.

Della ragione Armonica, e Contrarmonica.

132 SErvesi la musica per le sue consonanze di un altro rapporto, il quale dicesi perciò *ragione Armonica*. Essa risulta dall' unione delle ragioni geometrica, ed aritmetica. a, b, c, d, sono in ragione armonica, se $a : d = a - b : c - d$, cioè la prima alla quarta, come la differenza tra la prima, e la seconda alla differenza tra la terza, e la quarta. E a, b, c sono in ragione armonica continua, se $a : c = a - b : b - c$; la prima alla terza come la differenza tra la prima e la seconda alla differenza tra la seconda, e la terza.

133 Ora la prima analogia si riduce; $ac - ad = ad - bd$. Dalla quale nascono 1.° ... $a = \frac{bd}{2d - c}$. 2.° ... $b = 2a - \frac{ac}{d}$. 3.° ... 4.° ... $d = \frac{ac}{2a - b}$. Sieno 6, 8, 12, 18 in in ragione armonica;

$1.° \; a = \frac{8 . 18}{(2 . 18) - 12)} = \frac{144}{24} = 6 ;$

$2.° \; b = 12 - \frac{6 . 12}{18} = 12 - 4 = 8 .$

$3.° \; c = 2 . 18 - \frac{144}{6} = 36 - 24 = 12 .$

$4.° \; d = \frac{6 . 12}{(2 . 6) - 8} = \frac{72}{4} = 18 .$

134. La seconda proporzione mi dà ... $ab - ac = ac - bc$. Da questa ricavo le seguenti formole $1.° \; a = \frac{bc}{2c - b}$. $2.° \ldots b = \frac{2ac}{a + c}$. $3.° \; c = \frac{ab}{2a - b}$.

Sieno in ragione armonica continua ... $6 . 8 . 12$.

$1.° \; a = \frac{8 . 12}{2 . 12 - 8} = \frac{96}{16} = 6 ;$

$2.° \; b = \frac{2 . 6 . 12}{6 + 12} = \frac{144}{18} = 8 .$

$3.° \; c = \frac{6 . 8 .}{(2 . 6) - 8} = \frac{48}{4} = 12 ;$

135. Dalle formole possono ricavarsi i canoni per la soluzione de' problemi. 1.° Il quarto termine nella proporzione discreta si ha dividendo il prodotto del primo, e terzo per la differenza tra il doppio del primo e terzo (131. 4.°). 2.° Nella proporzione continua si trova il medio, dividendo il doppio prodotto degli estremi per la loro somma (132. 2.°). 3.° Il terzo, dividendo il prodotto de' due primi per la differenza tra 'l doppio del primo, e il secondo.

135. Si dia una progressione aritmetica nella formola $\div a : a + d ; a + 2d$ ec. si moltiplichi il primo termine pe 'l secondo, il primo pe 'l terzo, il secondo pel terzo ec. si avrà una serie ... $a^2 + ad$ ... $a^2 + 2ad$. $a^2 + 3ad\ 2d^2$. Analizandola trovo $a^2 + ad : a^2 + 3ad + 2d^2 = ad : ad + 2d^2$; il primo di que' prodotti al terzo, come la differenza tra 'l primo, e 'l secondo alla differenza tra 'l secondo e terzo. E quì basti aver di passaggio proposta la formola di ridurre una progressione aritmetica ad armonica.

Sieno ÷ 4 : 6 : 8 . . . 24 : 32 : 48 . . . :

137. Se finalmente quattro grandezze sono tali, che la quarta sta alla prima come la differenza tra la prima, e seconda alla differenza tra la seconda e quarta, sono in ragione *contro-armonica*. L' analogia è questa . . . $d : a = a - b : c - d$. Se poi la terza grandezza sta alla prima, come la differenza tra la prima, e seconda alla differenza tra la seconda, e terza; si ha la *Contrarmonica continua* . . . $c : a = a - b : b - c$.

138. La prima proporzione mi dà . . . $cd - d^2 = a^2 - ba$. Il secondo membro è un quadrato affetto (a) e si compie ag-

(a) Nell' originale al §. 56. 3.º si osservò che mancando il terzo membro di un quadrato, dicesi *affetto*, e si compie aggiungendo il quadrato della metà del secondo membro: ma non essendosi impresso, lo rechiamo quì, giacchè prima non ci è mai occorso, e abbiamo citato da quale formola questo teorema è dedotto. Può dedursi ancora dal §. 64. 3.º

giungendo ... $\frac{1}{4}b^2$. Dunque ... $a^2 - ba + \frac{1}{4}b^2 = cd + \frac{1}{4}b^2 - d^2$. Onde 1.° ..... $a = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + cd - d^2)}$ 2.° .. $b = \frac{2ac}{a+c}$.

3.° $c = \frac{ab}{2a-b}$.

139. Per l'altra analogia avremo ... $bc - c = ab - b$. E perciò 1.° .... $a = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + cb - c^2)}$. 2.° $b = \frac{a^2+c^2}{a+c}$. 3.° $c = \frac{1}{2}b + \sqrt{(ab - a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$.

LEZIONE XIV.

Delle Serie.

Costanti

I. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1;

Numeri naturali

II. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Numeri triangolari

III. 1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,

Piramidali

IV. 1,4,10,20,35,56,84,120,165,220,286.

140. Le quattro file de' numeri proposti formano quattro serie: la prima è costante, i suoi termini son tutti eguali; la seconda è de' numeri naturali, che van sempre crescendo: nascono dall' addizione de' termini della prima serie, e la loro differenza è costante. La terza è formata dall' addizione de' termini della seconda serie; ha costanti le seconde differenze: e dicesi di numeri triangolari, perchè volendo formare un triangolo di punti, se ne chiederebbero, quanti esprimono que' numeri. L' ultima dicesi de' numeriirami-

dali, perchè a formare una piramide, li *molecole* necessarie corrisponderebbero a termini di quella serie: nascono dall' addizione di quelli della seconda serie, ed han costanti le terze differenze. Le serie de' numeri naturali formano una progressione aritmetica, e la loro differenza è 1. Se si formasse de' numeri dispari, la di cui differenza è 2, ne nascerebbe coll' addizione una serie di numeri quadrati; e dall' addizione de' termini, che conservassero la differenza 3, se ne formarebbe una serie di *pentagoni*; figure de' cinque angoli. E così in generale il numero degli *angoli* de' *poligoni* supera di 2 la differenza della serie; da cui risultano.

141 La seconda delle proposte serie ha le prime differenze costanti, e dicesi di primo ordine, e perciò le progressioni aritmetiche sono serie aritmetiche di primo ordine. La terza ha costanti le seconde differenze, e si appella serie di second' ordine. E così serie dell' ordine m^{simo}, se sono costanti le differenze m^{simo}. Siccome le serie aritmetiche nascono dalle progressioni

aritmetiche, così le serie geometriche son formate dall' addizione de' termini analoghi delle progressioni geometriche, e sono di primo, di secondo, di terzo, o di m^{simo} ordine, secondo il numero delle progressioni, dalle quali nascono. Si danno ancora le serie aritmetico-geometriche, e le serie delle potenze.

142 Volendo dividere la grandezza c per $a+b$, si forma un rotto $\frac{c}{a+b}$. Ora questo quoziente può esprimersi per una serie infinita. Divido c per a, il quoziente $\frac{c}{a}$ è il primo termine della serie; lo moltiplico per ambidue i termini del divisore, e 'l prodotto $\frac{ca+cb}{a} = c + \frac{bc}{a}$, lo sottraggo da c, il residuo $-\frac{bc}{a}$ lo divido per la stessa grandezza, e 'l quoziente $-\frac{bc}{a^2}$ mi darà il se-

condo termine della serie. Continuando allo stesso modo, troverò la serie seguente....

$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - \frac{b^5c}{a^6}$ ec.. Ora supponendo $a=2, b=1, c=1$ il rotto proposto equivale a questo $\frac{1}{2+1}$, che si risolve in questa serie.. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$. I termini vanno continuamente diminuendosi, e dicesi *serie convergente*. Se poi i termini van sempre crescendo, la serie dirassi *divergente*, perchè continuandosi, si allontana maggiormente dal valore del rotto,

143 Se il rotto proposto si fa eguale ad una serie di grandezze indeterminate, può trovarsi il loro valore. Sia $\frac{c}{a+b} = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + Eb^4$ *ec.* moltiplicando ciascun membro dell' equazione si avrà

$$c = \begin{matrix} Aa + aBb + aCb^2 + aDb^3 + aEb^4 \text{ ec.} \\ Ab + Bb^2 + Cb^3 + Db^4 \text{ ec.} \end{matrix}$$

e trasponendo la grandezza, sarà l'equa-

zione ridotta a zero

$$o = \begin{matrix} Aa + aBb + aCb^2 + aDb^3 + aEb^4 \text{ ec.} \\ -c + Ab + Bb^2 + Cb^3 + Db^4 \text{ ec.} \end{matrix}$$

Essendo un membro dell'equazione zero, possiamo supporre anche tali tutte le altre colonne, ed avremo tante equazioni. I. $Aa - c = o \therefore A = \frac{c}{a}$ II. $ABb + Ab = o$ nella quale equazione posto il valore di A, trovasi $\therefore B = -\frac{c}{a^2}$. III. $aCb^2 + Bb^2 = o\; C = \frac{c}{a^3}$. IV. $aDb^3 + Cb = o \therefore D = -\frac{c}{a^4}$ V. $AEb^4 + Db^4 = o \therefore E = +\frac{c}{a^5}$ Onde mettendo i valori ritrovati, si avrà la serie . . . .

$$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} \text{ ec.}$$ come nel §. precedente, e si saranno fissate le grandezze. Questo è il metodo de' *coefficienti indeterminati*, col quale si risolvono le serie algebriche.

144. Se col metodo ordinario voglio estrarre la radice del binomio $a^2 - b^2$, avrò (72) . . $\sqrt{(a^2-b^2)} = a - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^4}{8a^3}$ ec. e 'l calcolo sebbene più facile, sarà molto lungo: ricorro perciò alla serie, e suppongo . . . $\sqrt{(a^2-b^2)} = A + Bb^2 + cb^4 + Db^6$. Onde elevati i membri a quadrato, e trasponendo con mutare i segni, ho l' equazione $o = \begin{matrix} A^2 + 2ABb^2 + B^2b^4 + 2ADb^5 + \text{ec.} \\ -a^2 + \quad b^2 + 2ACb^4 + 2BCb^6 + \text{ec.} \end{matrix}$

Formo ora tante equazioni, quante colonne sono nella data, e troverò i valori, che corrispondono alla radice ritrovata.

145. Oltre i rotti, de' quali abbiam ragionato (Lez. IV.) si danno i *rotti continui*, che han sempre il denominatore espresso da un intero unito ad un rotto. La loro formola è questa

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e\ \text{ec.}}}}}$$

O pure $a+\cfrac{r}{b+\cfrac{s}{c+\cfrac{t}{d+\cfrac{x}{e}}}}$ ec.

146. Così l'uno come l'altro si riducono in serie . . . $\frac{a}{1}$. $\frac{ab+1}{b}$. $\frac{abc+a+c}{bc+1}$. $\frac{abcd+ab+ac+ad+1}{bcd+b+d}$ ec. Allo stesso modo potrebbe analizzarsi il secondo rotto; e la serie ridursi al rotto continuo, dal quale è nata.

147. Per sommare una serie, o sia trovare una espressione algebrica, che pareggi

la somma de' suoi termini, fa d' uopo indagare il suo *termine generale*, cioè un' altra espressione algebrica, nella quale sostituito 1 dà il primo termine, posto 2 dà il secondo, 3 il terzo &c. Il termine generale lo chiamo T. Da questa semplice nozione possiam dedurre per una serie costante. $T = a = n^0$ (140), o sia al primo termine della serie, il quale è anche l' ultimo. Per la serie de' numeri naturali $T = n$. Potendo una serie fermarsi in qualunque termine; sarà $T = un$. Per una serie di qualunque grado $T = n^m$. Dunque 1.° $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} + un^0$ è il termine generale di qualunque serie della differenza m^{sima} 2.° Il termine generale di una serie è sempre l' ultimo. 3°. Onde esprimendo per S la somma generale, s la somma de' termini, escluso l' ultimo, ritrovo $T = S - s$. In ogni progressione geometrica

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} \text{ (122. 1.°) } T = u = aq^{n-1} \text{ (118.3°)}$$

ora questa formola nasce dalla prima, mettendo $n - 1$ invece di n. Dunque 4.° data

la somma di una serie, si trova il termine generale mettendo $n-1$ invece di n.

148. Per trovare il termine generale, analizzo la prima formola (145. 1.°) in riguardo ad una serie indeterminata . . . g, k, p . . . r. Suppongo $m=0$, trovo $T=an^{\circ}=a\,1=a$, e conosco la serie g, g, g, g, &c. costante.

149. Posta $m=1$, sarà $T=an^{1}+bn^{\circ}=an+b$; e fatta $n=1$, avrò $a+b=g$: fatta $n=2$ pe 'l secondo termine (145) trovo . . . $2a+b=k$; e perciò $k-g=a$ . . . $2g-k=b$. Onde $T=nk-ng+2g-k=g+(k-g).(n-1)$.

150. Sia $m=2$, sarà $T=an^{2}+bn^{1}+cn^{\circ}=an^{2}+bn+c$. Suppongo successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$, avrò 1.° $a+b+c=g$. 2.° $4a+2b+c=k$. 3.° $9a+3b+c=p$. E perciò $k-g=3a+b$, e $p-k=5a+b$, e $p-2k+g=2a$. Onde $a=\frac{g-2k+p}{2}$ . . $b=\frac{8k-5g-3p}{2}$ . . . $c=3g-3k+p$. E perciò $T=\frac{(g-2k+p)}{2}\cdot n^{2}\pm$

$\frac{(8k-5g-3p)}{2} \cdot n+3g-3k+p$.

151. Potrebbesi collo stesso metodo successivamente trovare il valore di T per qualunque valore di m. La somma poi si trova senza difficoltà, moltiplicando tutti que' valori per una espressione di n, An Bn, Cn *ec.* Si vegga Marie *Lez. di Mat.* specialmente per le interessanti applicazioni.

LEZIONE XV.

De' logaritmi.

152. SE i termini di una serie sono in ragione geometrica, i loro esponenti sono in ragione aritmetica. E queste grandezze si dicono *logaritmi* di quelle. Così ... a^0 a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7 a^8 ec. i numeri in questa progressione sono logaritmi delle lettere. Con piccola riflessione si osserva 1.° che la cifra 0 è il logaritmo dell' unità: onde segnando colla lettera iniziale della parola, sarà $0=l1$. Sia $a>1$

sarà $la>0$. Al contrario posta $a<1$, sarà $la<0$. Dunque 2.° i logaritmi degl' interi sono positivi, e de' rotti negativi.

153. Comparisca la grandezza a^x; sarà $x=la$. Ora tutto il calcolo de' logaritmi consite nel trovare il valore di quell' incognita. Analizzeremo questa equazione nella prima parte del terzo tomo, ove di proposito tratteremo delle equazioni. In questo luogo basta avvertire, che dolendosi i matematici da gran tempo della lunghezza de' calcoli specialmente per le potenze ed estrazioni delle radici, Giovanni Nepero ottenne al principio del secolo XVII. coll' invenzione de' logaritmi ridurre la moltiplicazione, e divisione a brevissime addizioni, e sottrazioni, l'invenzione delle potenze, e delle radici a facili moltiplicazioni, e divisioni.

154. Infatti volendo moltiplicare a^2 per a^4 basterà sommare gli esponenti, e sarà $a^2 \times a^4 = a^{2+4} = a^6$ (26.4.°) Egualmente $a^6 : a^3 = a^3$ E così a^3 si eleva a potenza qualunque n colla moltiplicazione degli espo-

nenti (32) e si ha a^{2n}. Colla stessa facilità se n' estrae la radice scrivendo $a^{\frac{2}{n}}$.

Costruzione ed uso delle tavole Logaritmiche.

155. Non si avrebbe il fine bramato de' logaritmi, se valenti matematici non ci avessero lasciate delle tavole, nelle quali si trova il logaritmo di ogni numero. L' Ill. Brigio costruì il canone logaritmico de' numeri, cominciando da 1 sino a 20000, e da 90000 sino a 100000, il celebre Ulacq supplì il vuoto tra 20000, e 9000. Posteriormente si sono costrutte altre tavole tra 1, e 10000.

156. Si determini il valore della grandezza letterale della precedente progressione, che dicesi *base logaritmica*, e si faccia $a=10$ si avrà 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, ossia 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, Ora essendo $l1=0$ (152), sarà $l10=1$, $l100=2$, $l1000=3$, ec. e così abbiamo i logaritmi 1, 10, 100, 1000 ec., ma non de' numeri intermedj. E poichè le gran-

dezze debbono, serbare la ragione geometrica, e i logaritmi l' aritmetica; tra 1, e 10 fa d' uopo inserire nove medj proporzionali, e novanta tra 10, e 100, così pegli altri: non posson dunque ottenersi senza rotti. Per evitarsi, si ricorre ai decimali, e 'l numero degli zeri si suppone eguali nelle grandezze, e ne' loro esponenti. Così $l1=0$ 0000000, $l2=1$,0000000ec:

157. Veniamo al fatto: Vogliasi il logaritmo del numero 7. Ognun vede, che questo numero sia tra 1, e 10. Dunque si trovi il mezzo proporzionale tra 1, e 10 con quanti zeri si voglino aggiunti a questi estremi es. g. tra 1.0000000, e 10.0000000. Fatta l' operazione si trova 3. 162270 assai minore di 7.0000000 che si è proposto. Perciò si trovi un altro medio tra 3. 162270, e 10. 0000000. E così continuando si otterrà finalmente $l7.$ = 0. 8450980.

158. Ma da questo calcolo ci dispensano i travagli de' prelodati autori. E colle loro tavole può ancora trovarsi il logaritmo di un numero maggiore del massimo com-

preso nel canone, o pure di un decimale, o di un intero con decimale. Infatti per trovare il logaritmo di o. 349. esamino il decimale, e lo trasformo in rotto ordinario $\frac{349}{1000}$ (42), trovo i logaritmi del numeratore e del denominatore, e sostraggo l'uno dall'altro (154).

159. Allo stesso modo, se dovessi trovare il logaritmo di 257. 59. Essendo questi numeri piccoli, facendone un rotto improprio, trovo il numeratore nel canone; e 'l calcolo si riduce al precedente. Se poi non trovasi nelle tavole, allora essendo certo, che il logaritmo del numero dato è tra l'intero, e tra l'altro intero che lo supera di 1. ; tra l'intero della grandezza data, e l'intero che la supera di 1: trovandosi i logaritmi, e la loro differenza: aggiungendo al proposto numero il suo decimale, si troverà il numero d'aggiungere al suo logaritmo. Questo si otterra, trovando il quarto proporzionale tra 'l denominatore, decimale aggiunto, e differenza de' logaritmi. Così si discorra per un numero, che supera il massimo del canone.

F I N E.

Pag.	ver.	Errori	Correzioni
22	10	$-$	$=$
30	17	motodo	metodo
34	7	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{8}$
48	73	62	61
55	13	b^{+}	b^{m}
88	4	proposizione	proporzione
88	19	(111, 3,°)	(101. 3.°)
92	17	$6\times 2-3\times 2=(5-2)\times 2$	$5\times 2-3\times 2=(5-3)\times 2$
93	8	15	25
93	12	ma	mb
98	15	elevato	o al primo moltiplicato per l esponente elevato
98	21	a^{n-1}	vy^{n-1}
98	22	$\sqrt[n-1]{a}$	$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$
100	3	(118 3.°)	(120. 3.°)
101	15	(114)	(115)
101	17	$\frac{nq-a}{q-1}$	$\frac{uq-a}{q-1}$
106	14	$\left(\frac{a+p}{2}\right)^{n}$	$\left(\frac{a+u}{2}\right)^{n}$
108	16	3	$3.^{\circ}c=2d-\frac{bd}{a}$
110	17	$a^2+3ad\ 2d^2$	$a^2+3ad+2d^2$
111	5	seconda	terza
112	3	$b=\frac{2ac}{a+c}$	$b=a+\frac{d^2-dc}{a}$

INDICE

DELLE LEZIONI.